

530

M57a

1955

REMOTE STORAGE

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

A N A L E S
DEL INSTITUTO DE FISICA

VOL. 1

MEXICO

1955

Pa Aug 56

ANALES DEL INSTITUTO DE FISICA

CONTENIDO:

	Pág.
ESTUDIO DE LAS REACCIONES ${}^6_6\text{C}^{12}(\text{d,p}){}^6_6\text{C}^{13}$ y ${}^8_8\text{O}^{16}(\text{d,p}){}^8_8\text{O}^{17}$. Fernando Alba A., T. A. Brody, Alonso Fernández, Marcos Mazari, Vinicio Serment Manuel Vázquez B.	1
ALCANCE APARENTE DE TRAZAS EN EMULSIONES NUCLEARES* T. A. Brody	19
SOBRE LA ESTRUCTURA DE LA RADICININA Octavio Cano Corona	27
LAS FUERZAS GRAVITACIONALES DE BIRKHOFF EN EL ESPACIO FISICO. C. Graef Fernández	35
SOBRE LA DISTRIBUCION DE LOS POLOS DE LA MATRIZ S EN EL MODELO OPTICO DEL NUCLEO Juan M. Lozano.	49
DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR UNA GOTA DE LIQUIDO Marcos Moshinsky	55
DETERMINACIONES DE SECCIONES TOTALES CON NEUTRONES DE ENERGIAS COMPRENDIDAS ENTRE 13.0 Y 16.2 MEV.* Marcos Mazari, Fernando Alba y Vinicio Serment	69
DETERMINACION DE LA EDAD DE LA MUESTRA: SP. 2 TAMAULIPAS MEXICO S. M. CANYON INFIERNILLO TM. C. 248, Tm. 248 LEVEL 7 CULTURE EARLY PORTALES Augusto Moreno Moreno	81
NOTAS SOBRE UN REACTOR DE URANIO NATURAL, D_2O , CO_2 . Leopoldo Nieto Casas	87
EL CAMPO DE LA ECUACION DE BHABHA Fernando E. Prieto C.	95

THE LIBRARY OF THE

AUG 30 1956

UNIVERSITY OF ILLINOIS

ESTUDIO DE LAS REACCIONES ${}_8\text{C}^{12}(\text{d},\text{p}){}_8\text{C}^{13}$ y ${}_8\text{O}^{18}(\text{d},\text{p}){}_8\text{O}^{17}$.

Fernando Alba A. , T. A. Brody, Alonso Fernández, Marcos Mazari, Vinicio Serment
Manuel Vásquez B.

EQUIPO EMPLEADO

Este trabajo se realizó empleando el generador electrostático de Van de Graaff del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Este aparato acelera protones o deuterones a energías hasta de 2 MeV. Se utilizó el gas deuterio en el aparato, para producir el haz de deuterones. Se compró agua pesada en Noruega y por medio de la electrólisis se obtuvo el deuterio. Por el tubo acelerador bajan deuterones (masa 2), moléculas ordinarias de deuterio ionizado (masa 4) y moléculas ionizadas más complejas (masa 6) como por ejemplo, 3 deuterones ligados por 2 electrones. Todas estas partículas de diferentes masas salen del tubo acelerador con la misma energía. El campo magnético sirve para separarlas y además para medir con gran precisión la energía de deuterones que van a emplearse como proyectiles.

Para encontrar la energía de un proyectil, se mide el campo magnético empleado H , con ayuda del flúxmetro de resonancia magnética nuclear, se encuentra

el producto $H\rho$ ($\rho = 40.58 \text{ cm.}$) y de ahí la energía.

Los deuterones que salen del campo magnético deflector van a dar en el blanco, como se muestra en las Fig. 1 y 2. El blanco fué en unos casos de form-

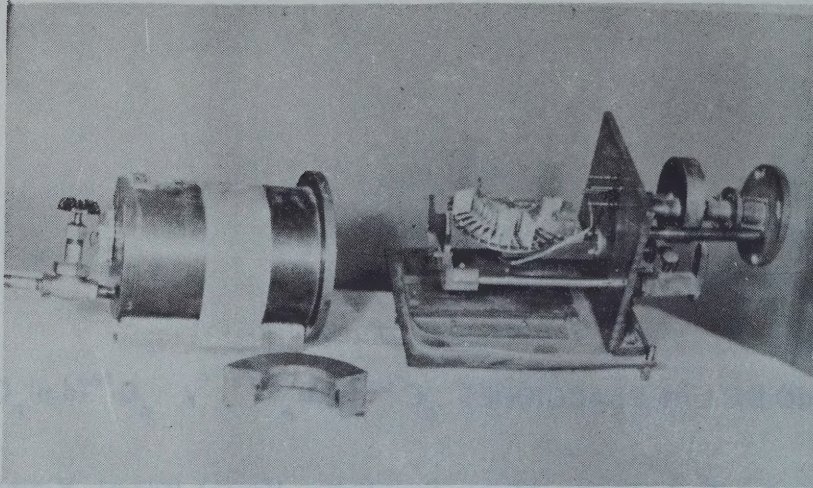


Fig. 1 Cámara de blancos. Algunas placas están colocadas en el sector porta-placas. Delante, la cubierta de latón que protege las placas contra luz y partículas dispersadas.

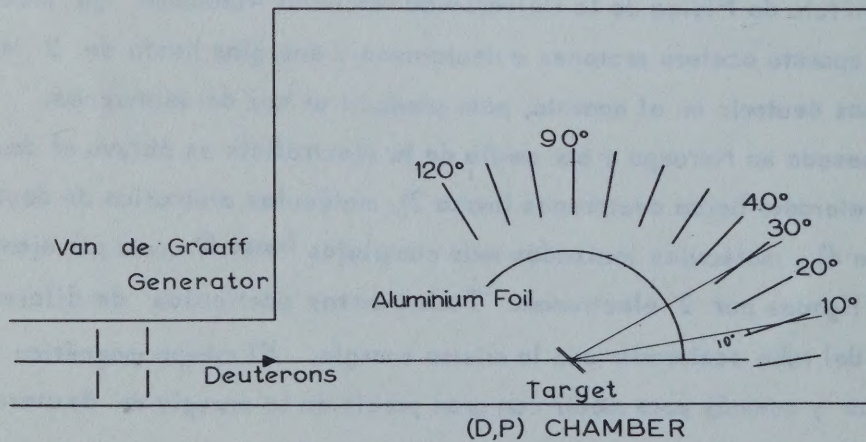


Fig. 2 Esquema de la disposición de las placas en la cámara de blancos.

var y en otros de polietileno; el primero es un compuesto de oxígeno, carbono e hidrógeno y se utilizó para estudiar los niveles y distribución angular de los protones que se producen en las reacciones ${}_8\text{C}^{12}(\text{d},\text{p}){}_8\text{C}^{13}$ y ${}_8\text{O}^{16}(\text{d},\text{p}){}_8\text{O}^{17}$. El blanco de polietileno contiene únicamente carbono e hidrógeno y se utilizó para estudiar la reacción ${}_6\text{C}^{12}(\text{d},\text{p}){}_6\text{C}^{13}$. Como todos los protones provienen de esta reacción, su estudio es más sencillo en este caso.

Los protones producidos en el blanco fueron registrados por emulsiones fotográficas nucleares colocadas de manera que los protones lleguen a ellas bajo un ángulo de incidencia de 80° .

Se colocaron los filtros de aluminio para evitar que los deuterones dispersados o los protones de baja energía llegarán a las placas. A 10° se colocó un filtro de 0.0196 gr/cm^2 , a 20° se colocó otro de 0.0112 gr/cm^2 y de 30° a 120° se utilizó uno de 0.0094 gr/cm^2 .

Con ayuda de las tablas de Bethe (Bethe y Ashkin 1953) se encontró una gráfica, Fig. 3, que nos da la energía de salida del protón, si se conoce la energía con que ésta llega a cada uno de los filtros.

Los deuterones, después de atravesar el blanco fueron colectados en una placa conectada a un integrador de corriente; se encontró que una carga de $40 \mu\text{C}$ en el integrador era suficiente para producir exposición apropiada de las placas.

PREPARACION DE LOS BLANCOS.

a) **El blanco de polietileno** $(\text{C}_2\text{H}_4)_n$. Se disuelve el polietileno en tolueno o xileno, a una temperatura poco menor que la de ebullición del solvente. Esta solución se coloca en un vidrio por medio de un gotero de manera que la capa sea muy delgada. Cuando el solvente se ha evaporado, queda una película muy delgada de polietileno. Al colocar el vidrio en agua la película se despegue y flota, después de lo cual se coloca en el marco deseado.

Se le coloca en una campana al vacío y se le deposita una capa de oro muy delgada por el método de evaporación. En esta forma el blanco resiste al haz de deuterones, ya que se vuelve mucho mejor conductor térmico y eléctrico, de ma-

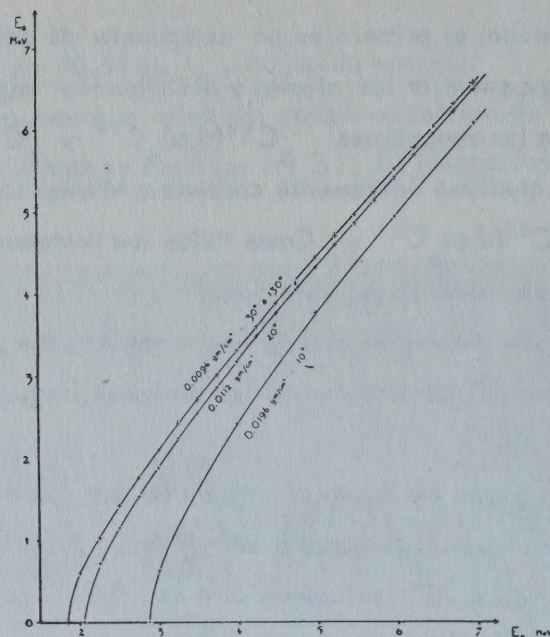


Fig. 3 Pérdida de energía de los protones en los filtros (Bethe y Ashkin 1953).
 E_e , energía inicial, E_s , energía al salir de filtro.

nera que no se acumulan altas cargas electrostáticas debidas al haz.

b) **El blanco de formvar.** Se disuelve un gramo de formvar polivinilformal en 100 cm³ de dicloruro de etileno.

Al colocar una gota en agua se forma una película delgada que flota en ella. Se recoge con un marco de blancos en donde se deposita una capa doble.

El proceso puede repetirse varias veces de acuerdo con el espesor deseado. Se deposita una capa de oro sobre el mismo.

REVELADO DE LAS PLACAS.

El método de revelado de placas de 50 μ no presenta complicaciones.

1. Se coloca las placas durante 4 minutos en revelador Kodak a 29° C, diluido 1:1.
2. Se lavan durante seis minutos en agua corriente.
3. Se colocan en fijador Kodak F5 el doble del tiempo empleado en aclararse, a 20° C. Este paso requiere aproximadamente una hora.
4. Se lavan 30 minutos en agua corriente.

5. Se dejan secar.

Las placas empleadas fueron Kodak N. T. A. de 50μ , de tamaño $1'' \times 3''$.

Se observaron, antes de usarse, con una lámpara de seguridad Kodak de la serie 0A, para comprobar que la emulsión se encontraba en buen estado. Se cortaron en dos pedazos de $1'' \times 1 \frac{1}{2}''$ para colocarlas en la cámara de blancos.

Después de haber sido expuestas, se pintaron sus bordes con mixtión de plátano, para evitar que se despegara la emulsión al ser revelada, ya que durante cierto tiempo fueron colocadas en vacío.

LECTURA DE LAS PLACAS.

Los protones entran a las placas formando un ángulo de 80° con la normal siendo paralelas las trayectorias. En este caso es muy fácil distinguir una trayectoria que no venga del blanco.

Las longitudes de las trayectorias fueron medidas con microscopios Zeiss "Standard" equipados con un ocular que contiene una escala de 0 a 100. Esta escala fué calibrada en micras contra una escala colocada en el objetivo y que tiene 100 divisiones /mm.

En este trabajo se utilizó un objetivo 100 x de inmersión y oculares 8 x. Se encontró que con esta amplificación la medida de la trayectorias es más sencilla y más precisa.

Los protones sólo tienen acceso a las placas a través de una ventana rectangular cuyo ancho es mayor que el de la placa y cuya altura es de 6 mm. (Fig. 1 y Fig. 2).

Se midió la franja que corresponde al eje horizontal de simetría de la ventana y las adyacentes de manera que el número de trayectorias registradas fuera aproximadamente de 1000 en cada placa.

Teniendo en cuenta que la longitud que medimos es la proyección de la trayectoria sobre su plano es necesario corregirlas para obtener el verdadero alcance.

$$l = \frac{l'}{\cos 10^\circ}$$

De la curva alcance-energía o de las tablas equivalentes a la misma, se puede saber la energía de los protones al llegar a la emulsión y con ayuda de la Fig. 3, se puede saber la energía de los protones al salir del blanco.

RESUMEN DE LA TEORIA DE BUTLER.

Para poder comparar las curvas de Butler con los resultados obtenidos, es necesario explicar brevemente (sin entrar en desarrollos matemáticos), en qué consiste la teoría de Butler, y cómo se calculan sus curvas.

Nos concretaremos únicamente al caso en el que el proyectil sea deuterón y las partículas capturadas un neutrón.

En el modelo del núcleo compuesto, el proyectil es capturado por el blanco, los nucleones del deuterón interaccionan con los del blanco y pierden totalmente su identidad. Este núcleo compuesto tiene una vida que es mucho mayor que el tiempo que hubiera empleado el deuterón en recorrer una distancia igual al diámetro del blanco. El núcleo compuesto decae en el llamado núcleo final, al emitir una partícula.

En el proceso del desmenbramiento (stripping) del deuterón no se forma un núcleo compuesto. En este caso uno de los nucleones del deuterón es capturado por el blanco y el otro es rechazado sin haber formado parte del mismo en algún momento.

Cuando es capturado el protón, la partícula saliente es un neutrón.

El proceso que nos interesa en este trabajo es cuando el neutrón es capturado y la partícula saliente es un protón.

El desmembramiento del deuterón es generalmente más probable que la formación del núcleo compuesto, debido a la pequeña energía de amarre y el diámetro considerable del deuterón.

Cuando el proceso del desmembramiento es predominante en una reacción dada, se observa que la distribución angular de la partícula saliente tiene un máximo notable para un ángulo relativamente pequeño.

La posición del máximo depende únicamente de los spins y paridades de los estados inicial y final, y de la energía del deuterón. Los máximos bien defi-

nidos se deben a la conservación del momento angular y la paridad, que permiten al blanco aceptar un nucleón, con un momento angular que puede tener un número muy limitado de valores, para formar un nucleón final en un estado dado.

En sus desarrollos, Butler supone que la probabilidad de formación del núcleo compuesto es despreciable. Esta suposición se justifica en muchos casos con los resultados experimentales, y sobre todo a altas energías. En esta teoría se desprecia también el efecto coulombiano. Esto significa que la teoría vale únicamente cuando la energía del deuterón es suficientemente grande, de manera que el efecto coulombiano sea pequeño.

Se ha comprobado experimentalmente que en muchos casos la teoría da resultados cualitativos a energías del deuterón menores que 2 MeV.

Esta teoría puede utilizarse para determinar el momento angular con que es capturado el neutrón, comparando la distribución angular experimental a pequeños ángulos, con las curvas teóricas de Butler para diferentes momentos angulares del neutrón capturado.

Una vez conocido el momento angular con que es capturado el neutrón, se puede obtener una valiosa información sobre el spin y la paridad del estado final del núcleo si se conocen el spin y la paridad del estado base del blanco. La teoría requiere que la conservación de los momentos angulares esté dada por:

$$\vec{l}_n + \vec{s}_n + \vec{i} = \vec{J}$$

en forma vectorial, 0

$$\left| \vec{J} + \vec{i} + \vec{s}_n \right|_{\min.} \leq l_n \leq J + i + s_n$$

El significado de las literales es:

$\vec{J}$ momento angular del núcleo final,

$\vec{i}$ momento angular del núcleo blanco,

$\vec{s}_n$ spin del neutrón capturado, y

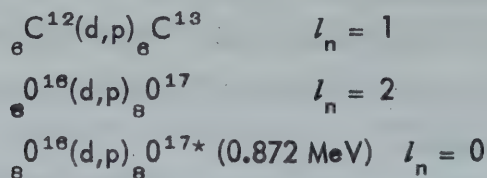
$\vec{l}_n$ momento angular orbital del neutrón capturado.

Además las consideraciones de paridad requieren que l_n sea par cuando

el estado inicial y final tienen la misma paridad, y que sea impar cuando las paridades del estado inicial y final son diferentes.

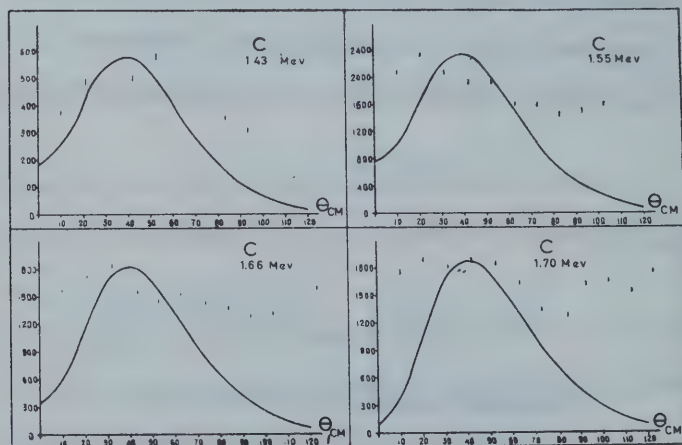
Conociendo l_n se pueden encontrar los posibles valores de J de acuerdo con el modelo vectorial: las desigualdades citadas arriba permiten solamente un valor de J en muchos casos y dos o tres posibilidades en otros casos.

Las tres reacciones estudiadas en el presente trabajo son las siguientes:



Los momentos angulares indicados aquí se han obtenidos de estudios de estas reacciones a altas energías y además son confirmados por los spins y paridades de los núcleos.

El presente trabajo fué empezado con el fin de determinar hasta qué energía del deuterón se puede aplicar la teoría de Butler y de qué modo falla a energías inferiores.



Figs. 4-7 Distribuciones angulares de los protones de la reacción $\text{C}^{12}(\text{d},\text{p})\text{C}^{13}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

LA REACCION $C^{12}(d,p)C^{13}$: RESULTADOS.

Blancos de polietileno fueron expuestos a energías de bombardeo (sistema de laboratorio) de 1.43, 1.55, 1.66, 1.70, 1.85, 1.90 y 1.95 MeV.

El número de trazas contadas en cada placa fué directamente convertido al sistema centro de masa, utilizando las tablas de Moskow (1948) y su extensión calculada por Nieto Casas y Serment (1954). Los resultados obtenidos con un total de 308,207 trazas contadas en estas siete series de placas se ven las figuras 4 a 10. Los errores son los estadísticos exclusivamente, sin tomar en cuenta errores sistemáticos como la variación del ángulo de salida de la reacción a través de la placa. Las curvas continuas representan los valores calculados por la teoría de Butler, sin correcciones, y normalizados al máximo de las secciones diferenciales experimentales. El momento angular del neutrón capturado se tomó igual a 1 en conformidad con los datos obtenidos de la reacción a energías de bombardeo más altas (Rotbat 1951).

Es evidente que la teoría sencilla de Butler falla para estas energías. Sólo para 1.43 MeV la curva experimental tiene cierto parecido con la teórica; y aún ahí las fórmulas mejoradas deducidas por Horowitz y Messiah (1953) darían una adaptación mejor, ya que indican picos bastante más achatados. Pero para los demás valores de la energía de bombardeo, ninguna de las dos teorías es capaz de interpretar adecuadamente estos datos.

La falla de la teoría de Butler se debe al desprecio de la interacción coulombiana y de la posibilidad de formación de un núcleo compuesto. Correcciones para tener en cuenta el efecto coulombiano han sido calculadas por Tobocman (1954, Tobocman y Kalos 1955), por Grant (1954, 1955) y por Yoccoz (1954). Los dos primeros autores obtienen un levantamiento de la curva de distribución angular a pequeños ángulos y un corrimiento de los picos hacia ángulos mayores; Yoccoz indica que las curvas deben achatarse. Tobocman y Grant toman en cuenta también otros efectos; Tobocman incluye la interacción del protón saliente con el núcleo final y la dispersión del haz de deuterones, mientras Grant trata además la formación de un núcleo compuesto por intercambio del protón, suponiendo un potencial

de oscilador armónico para el núcleo blanco a fin de tener una representación más apropiada que el potencial infinito de Horowitz y Messiah.

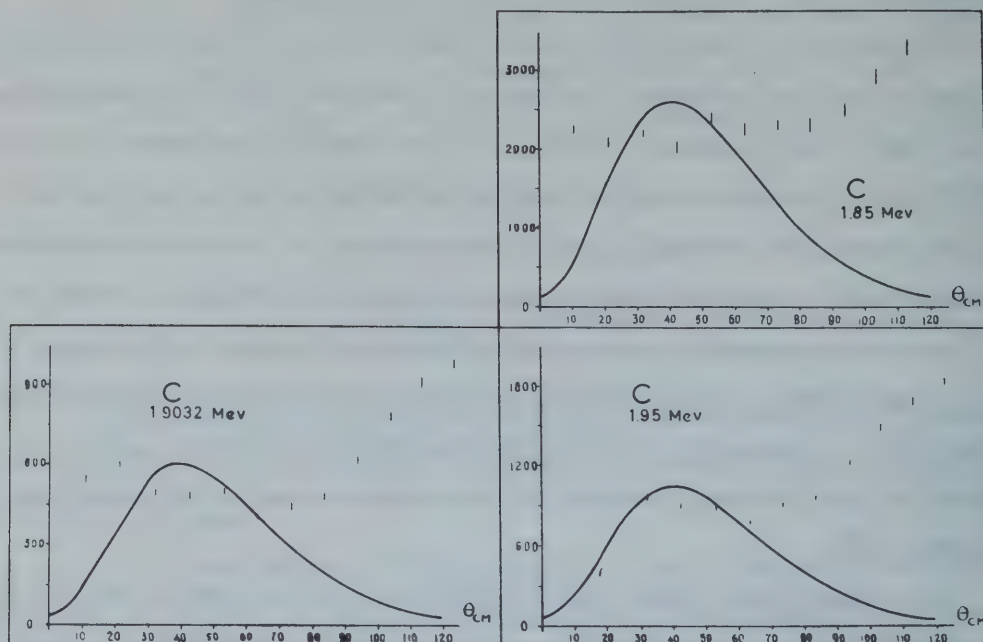


Fig. 8-10 Distribuciones angulares de los protones de la reacción $C^{12}(d,p)C^{13}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de errores son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

Las variaciones propuestas de la sección diferencial no están siempre de acuerdo entre sí, aunque se puede decir de manera general que todas estas teorías indican máximos y mínimos bastante más pronunciado que los que muestran nuestras curvas experimentales. La distribución aproximadamente isotrópica que se obtiene para 1.66 y 1.70 MeV indica una preponderancia de la formación de un núcleo compuesto en la reacción; sería deseable una extensión de los experimentos más allá de 120° ya que en oposición a la teoría de Butler parece existir una contribución importante a ángulos grandes. Una extensión hacia ángulos grandes haría posible también aplicar el análisis propuesto por Bowcock (1955) a los datos.

Phillips (1950) ha determinado distribuciones angulares para esta reacción

a energías más bajas, y obtiene curvas del mismo tipo.

LA REACCION $O^{16}(d,p)O^{17}$: RESULTADOS.

Blancos de formvar fueron expuestos a energías de bombardeo (sistema de laboratorio) de 1.43, 1.71, 1.84 y 1.90 MeV. En cada placa se midieron 1000 trazas (en algunos casos menos), y además se contó el número de trazas en tres franjas con la misma técnica que la aplicada para los blancos de polietileno, para poder calcular la frecuencia en trazas por unidad de área con la cual ocurren las tres reacciones producidas.

Se dibujaron los alcances medidos de las trazas contra las frecuencias; una de estas gráficas está dada por la Fig. 11.

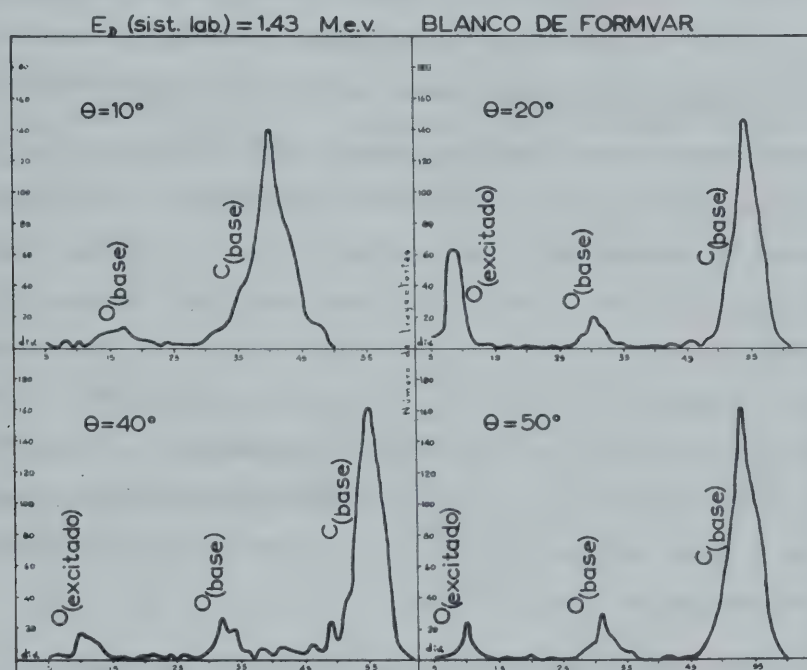


Fig. 11. Distribución de los alcances para cuatro ángulos al bombardear con deuterones de 1.43 MeV. 1 división = 1.6μ .

Se nota que los tres picos debidos a las tres reacciones se diferencian claramente hay un fondo de unas pocas trazas para cada longitud: este fondo se debe a la dispersión inelástica de protones en los bordes de la rendija definiendo el haz de protones y en el filtro, y a protones de reculada producidos en la emulsión por

neutrones de las reacciones (d,n).

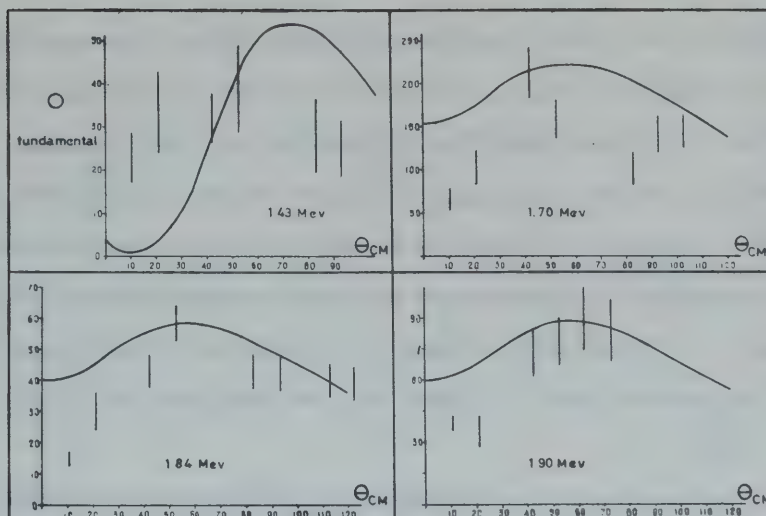
El número de partículas para cada reacción se tomó como el número de trazas contenido en el pico correspondiente, considerando que el pico queda entre los dos puntos en donde la frecuencia empieza a exceder la del fondo. Ninguna corrección se aplicó en forma de una sustracción del fondo, por la imposibilidad de estimar de una manera apropiada su valor. Ignorar el fondo no puede haber afectado notablemente los dos picos debidos al estado excitado del oxígeno y al carbono ; solamente el nivel fundamental de oxígeno contiene muy pocas trazas (1732 sobre un total de 23,884 medidas) y la corrección sería de alguna importancia, del orden del error estadístico en este caso.

Se pasa de la distribución de alcances en cada placa a la distribución angular para cada nivel y cada energía de bombardeo, y los valores así obtenidos se transfieren al sistema de centro de masa mediante las tablas ya mencionadas.

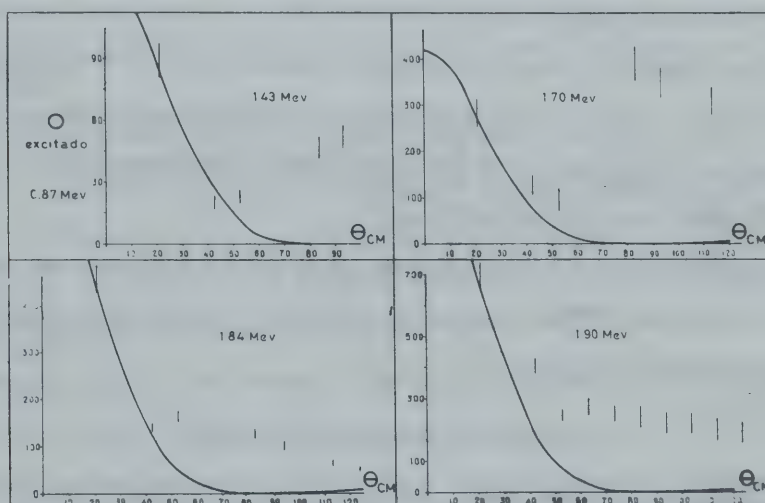
Los resultados para el nivel fundamental del O^{17} se ven en las Fig. 12 a 15. En las figuras están indicados los errores estadísticos. Las curvas continuas representan los valores calculados mediante la teoría de Butler y normalizados para coincidir con el máximo de los valores experimentales. El momento angular del neutrón capturado es igual a 2, según la determinación a altas energías de Burge, Burrows, Gibson y Rotblat (1952). Debido al número pequeño de trayectorias que corresponden a este nivel, los errores experimentales son grandes, por lo que es difícil sacar conclusiones. Se vé, sin embargo, que hay una mejor coincidencia con las previsiones de la teoría de Butler que para el caso del carbono, particularmente a las energías de 1.84 y 1.90 MeV.

LA REACCION $O^{16}(d,p)O^{17*}$: RESULTADOS.

En las mismas placas en que se observaron los grupos de protones correspondientes al estado base del oxígeno, se observaron también los grupos mucho más abundantes del primer estado excitado (0.872 MeV). De las 23,884 trazas medidas 9221 pertenecían a estos grupos. Después de los mismos cálculos que para los grupos del estado base, se obtuvieron los resultados representados en las Fig. 16 a 19. Las curvas de Butler dibujadas para la comparación corresponden a un



Figs. 12-15 Distribuciones angulares de los protones para la transición al estado base de la reacción $0^{16}(d,p)0^{17}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).



Figs. 16-19 Distribuciones angulares de los protones para la transición al primer estado excitado (0.872 MeV) de la reacción $0^{16}(d,p)0^{17}$ a las energías de bombardeo indicadas (sistema laboratorio). Los límites de error son las desviaciones normales. Las curvas continuas corresponden a la teoría de Butler (1951).

momento angular de cero para el neutrón capturado (Burge, Burrows, Gibson, Rotblat 1952). En la ausencia de datos a 0° , la normalización se hizo a 20° .

Debido a la mejor estadística, los errores son más pequeños. Los datos experimentales concuerdan relativamente bien con la teoría de Butler para ángulos menores de 50° ; pero más allá aparece en todos los casos un máximo secundario que la teoría no predice. Este máximo es particularmente pronunciado para la energía de 1.71 MeV. La explicación puede encontrarse en el hecho de que a esta energía el núcleo compuesto, flúor 18, tiene un nivel excitado de 9 MeV (Ajzenberg y Lauritsen 1955).

La misma reacción ha sido estudiada con el nuevo acelerador electrostático de Saclay (Berthelot et al. 1954); los resultados para energías de 1.66, 1.78, 1.82 y 1.94 MeV obtenidos por este grupo concuerdan muy bien con los presentados aquí. Las conclusiones difieren, sin embargo, notablemente en cuanto al nivel de resonancia de 9.5 MeV en el F^{18} : mientras la resonancia de 9 MeV influye mucho sobre la forma de la distribución angular, la de 9.5 MeV no la afecta y se muestra solamente en las curvas de excitación.

Las paridades y spins de estos dos niveles de F^{18} son todavía desconocidos; pese a esto, parece lícito suponer que la diferente influencia de la formación de un núcleo compuesto en los dos casos se debe a una diferencia en la propiedad de estos dos estados excitados del flúor.

El máximo secundario observado no se puede explicar por el efecto coulombiano; a pesar de sus divergencias, ninguna de las formulaciones teóricas citadas indica un máximo a estos ángulos.

ERRORES EXPERIMENTALES.

a. Blancos de polietileno. La energía de los deuterones se conoce con una precisión de ± 15 keM. El espesor del blanco produce un error de ± 20 keM. Los ángulos en el sistema centro de masa varían de $\pm 2^\circ$.

Los errores en el recuento de las trazas se deben a las siguientes causas:

i. Fondo por dispersión y otras reacciones: aproximadamente 40 trazas sobre 1000 contadas, o sea 4%.

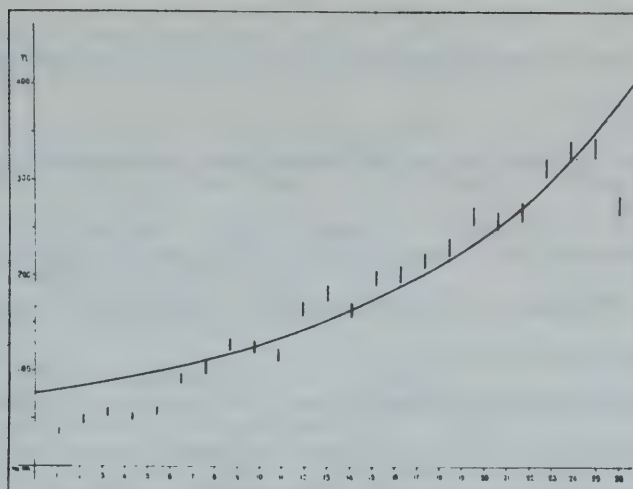


Fig. 20 Variación del número de trazas en una placa en función de la distancia al borde. El origen es el borde alejado del blanco. La curva continua representa la variación del ángulo sólido subtendido al blanco por la unidad de área. Para 26 mm el borde de aluminio elimina una parte de las trazas.

ii. Errores de lectura: 1%. Esta estimación incluye el error en el recuento de las franjas, así como los errores debidos a la longitud variable de las franjas y el error sobre la determinación de la anchura de las franjas.

iii. Error estadístico. Este error depende del número contado y se ha indicado en las figuras 6 a 9 para cada punto.

La distribución de las trazas a lo largo de la franja no es uniforme, debido a la variación del ángulo sólido. En la figura 20 se compara la distribución experimental del número de trazas en cada 0.085 mm^2 de la placa con la distribución teórica. La concordancia es buena, excepto en el extremo alejado del blanco; la pequeña desviación que se observa allí no ha recibido una explicación satisfactoria, pero su influencia sobre el error global de las determinaciones es despreciable.

b. **Blancos de formvar.** La precisión de la energía de los deuterones, el espesor del blanco, y el error sobre los ángulos son los mismos que para los blancos de polietileno.

Los errores en la determinación del número de trazas en cada grupo de protones son los siguientes:

i. Fondo por dispersión y otras reacciones: aproximadamente 40 trazas sobre 1000, o sea 4%.

ii. El esparcimiento ("straggling") causa una incertidumbre de 7 keV en la energía de las partículas o sea, para protones saliendo del blanco con una energía de 1 MeV, un error de 1%.

iii. La precisión en la determinación del número de trazas en cada pico es 2% para un pico conteniendo 1000, y proporcionalmente mayor para los picos más pequeños. Este error incluye errores en la determinación de los alcances, errores en la delimitación de los picos y errores debidos a cambios en la longitud y anchuras de las franjas.

iv. Errores estadísticos. Este error depende del número medido y se ha indicado en las figuras 12 a 19 para cada punto.

Los señores Luis y Juan Velásquez Soto fueron responsables del manejo del acelerador de Van de Graaff y de su mantenimiento en buen estado. Las señoritas Lilia Aldave L. y Gloria Cadena G. se encargaron del escrutinio microscópico de las placas. Jorge Dorantes y Alfonso Urbina hicieron el revelado de las placas.

Nuestro agradecimiento va también al Dr. Marcos Moshinsky y al Prof. W.W. Buechner, con los cuales hemos tenido muchas discusiones fructíferas acerca del presente trabajo.

REFERENCIAS

- Ajzenberg, F. y T. Lauritsen 1955, Rev.Mod.Phys. , 27 , 77.
Berthelot, A. et al. 1954 , C.R. , 238 , 1312.
Bethe H.A. y J. Ashkin, 1953, en Segré, Experimental Nuclear Physics, New York 1953, Vol. 1 , P. 166.
Bowcock, J.R. 1955, Proc.Phys.Soc. A 68, 512.

- Burge, E. J. , H.B. Burrows, W.M. Gibson y J. Rotblat 1952, Proc.Roy.Soc. **A**, **210** 534.
- Butler, S.T. 1951, Proc.Roy.Soc. **A**, **208**. 559.
- Grant, I.P. 1954, Proc.Phys.Soc. **A**, **67** , 981.
- Grant I.P. 1955, Proc.Phys.Soc. **A**, **68**, 244.
- Horowitz, J. y A.M. Messiah 1953, J.Phys.Rad. , **14**, 695 .
- Moskow, M. 1948 , Tesis Johns Hopkins University, Baltimore.
- Nieto Casas L. y V. Serment 1954, Cosmos y Ciencia, **1**, No. 1.
- Phillips, G.C. 1950, Phys.Rev., **80**, 164.
- Rotblat, J. 1951, Nature, **167**, 1027.
- Tobocman, W. 1954, Phys.Rev., **94**, 1655.
- Tobocman, W. y M.H. Kalos, Phys.Rev. , **97**, 132.
- Yoccoz, J. 1954, Proc.Phys.Soc. **A**, **67**, 813.

ALCANCE APARENTE DE TRAZAS EN EMULSIONES NUCLEARES*

T. A. Brody

I

En un trabajo anterior (Brody 1954, citado como I), se utilizó un modelo bidimensional de una emulsión nuclear a fin de obtener una fórmula empírica de corrección para el efecto de varias densidades de granos en el fondo sobre el alcance aparente de trazas de diferentes densidades. El fondo se debe a una variedad de causas, de las cuales las más importantes son el revelado espontáneo de algunos granos (fondo químico, "fog") y el paso de los rayos γ . Berriman (1951) y Coates (1951) mostraron que la distribución de granos en el fondo y en la traza es casual, es decir, es una distribución de Poisson en dos dimensiones y en una respectivamente.

El modelo bidimensional utilizado en I para obtener la fórmula de corrección fué construido bajo esta presuposición, y de él se dedujo la formula:

$$\Delta L = 19.54 + 6.02 d - 0.283 D - 0.087 dD \quad (1,4)$$

En esta ecuación, ΔL es la corrección que hay que aplicar a la medida de L .

*Este trabajo se presentó en la Asamblea Conjunta de la Sociedad Mexicana de Física y de la American Physical Society, México, Agosto 1955.

alcance, en μ , d la densidad de granos en el fondo, en granos por $100 \mu^2$, y D la densidad lineal de granos en la traza, en granos por 100μ . En I se admitió un diametro de 1.2μ para el grano revelado, valor característico para emulsiones reveladas con ID 19 e Kodak D 19b: para poder aplicar la formula (1,4) también a casos de un tamaño diferente de los granos, se expresa en términos del diametro del grano s, en μ :

$$\Delta L = 19.54 + 4.18 s^2 d - 0.236 sD - 0.050 s^3 dD.$$

En el presente trabajo se estudian los alcances aparentes de partículas α debidas al uranio, superpuestas a un fondo de radiación γ , para obtener una verificación experimental de la fórmula de corrección y una indicación de sus límites.

En lo que sigue, se llamará "densidad del fondo" la densidad, en granos por $100 \mu^2$, de los granos del fondo γ , y "densidad lineal" la densidad, en granos por 100μ , de los granos a lo largo de las trazas. Las dos cantidades son de diferentes dimensiones.

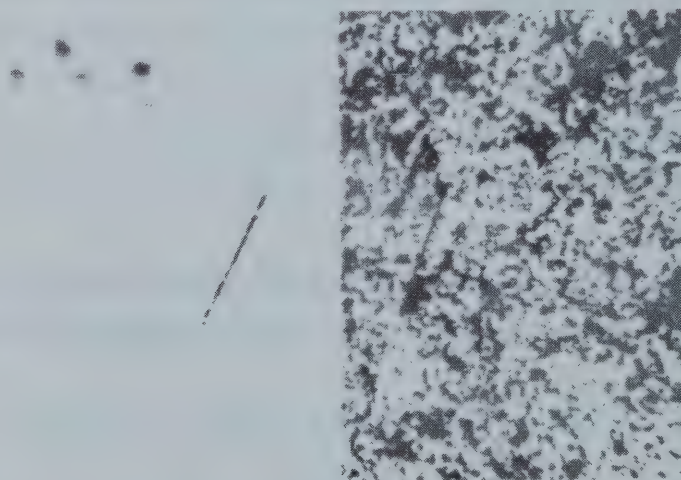


Fig. 1 Partículas α del uranio. Densidad lineal 92 granos/ 100μ . A la izquierda, sin fondo γ . A la derecha, fondo γ de 15.3 granos/ $100 \mu^2$.

II

Placas Ilford de $200\ \mu$ de espesor se impregnaron con una solución diluída de sulfato de uranilo, llevada a un pH de 5.6 aproximadamente por la adición de citrato sódico, (Rochat 1949, Brody 1950) a fin de minimizar la acción desensibilizadora del ion uranilo. El tiempo de impregnación fué de una hora; después de impregnadas, las emulsiones se enjuagaron con alcohol etílico para quitar el exceso de solución impregnadora y acelerar el secado subsiguiente. Una vez secas, las placas se expusieron a una fuente de rayos γ de ^{60}Co durante varios tiempos; el máximo de la exposición correspondió a unos 18 r. Para el revelado se usó el método de las dos temperaturas de Occhialini (Dilworth, Occhialini, Vermaesen, 1950) las temperaturas empleadas fueron 2°C para la penetración y 21°C para el revelado, y el revelador era amidol en una solución de un pH de 7.2. El tiempo de revelado variaba entre 16 y 40 minutos, con el fin de obtener una gama de diferentes densidades lineales en las trazas de las partículas α . Algunas placas se revelaron también con el revelado Kodak D 19 y con un revelador acidificado al amidol (Haenny y Gailloud, 1952); pero en vista de que el tamaño del grano depende fuertemente del revelado, estas placas no podían ser comparadas directamente con las demás. No se presentarán, por lo tanto, resultados con respecto a estas placas; pero cabe decir que cualitativamente concuerdan con los resultados de placas reveladas con el revelador normal al amidol.

El examen microscópico mostró que en placas habiendo recibido una exposición de 5 r o más no se podían ver trazas; por lo tanto se estudiaron solamente placas con menos de este límite. Las placas fueron repartidas en cinco grupos, según la exposición que habían recibido, y para cada grupo se obtuvo una densidad media del fondo. En cada placa se escogió para estudio una área cuya densidad del fondo era igual al valor promedio del grupo; esto fué posible por causa de la falta de uniformidad del revelado. Esta falta de uniformidad es inevitable y siempre es particularmente pronunciada para el fondo. En cada área se midió un cierto número de trazas horizontales, el criterio de "horizontalidad" siendo que ambas extremidades apareciesen afocadas en el microscopio. El objetivo utilizado era un Zeiss 100 x

de inmersión, y este criterio corresponde a una diferencia máxima de aproximadamente 1μ en profundidad. Dado que la mayoría de alcances estaban entre límites bastante estrechos, no se aplicó ninguna corrección para el ángulo sólido así definido (Najar, 1949). Para las densidades de fondo bajas, esta manera de proceder no presentó ninguna dificultad; pero en los dos últimos grupos había que omitir los valores más bajos de densidad lineal. El número total de trazas medido era 2920.

Para ilustrar estos puntos, presentamos en la fig. 1 dos microfotografías, una de una traza α sin fondo, tiempo de revelado 18 minutos, la otra con un fondo de 15.3 granos por $100 \mu^2$ y el mismo tiempo de revelado. (Ambas trazas tienen aproximadamente 21μ de largo; la apariencia tan oscura del fondo se debe a la superposición de granos del fondo a través todo el espesor de la placa).

Las gráficas de la fig. 2 muestran las distribuciones de alcances obtenidas para dos densidades de fondo diferente, y el mismo valor de la densidad lineal. Para la densidad de fondo más baja, la separación de los dos picos es bastante para permitir el cálculo de un promedio independiente para cada uno. Pero para la densidad más elevada, esto resulta imposible por la anchura de los picos, de modo que hubo que tomar las abscisas de los máximos (determinados gráficamente) como valores representativos. Con el fin de tener un procedimiento uniforme, se empleó la determinación gráfica para todos los casos. Esto implica, inevitablemente, errores considerables; es obvio que los picos se acercan mutuamente al traslaparse sus "colas", y sería posible emplear una corrección (Libowitz & Bauer 1955); pero en vista de la poca precisión con que se determinan las otras cantidades, la labor necesaria para tal corrección hubiera sido excesiva. Para tener en cuenta este modo impreciso de determinar los promedios se incluyó un factor 2 en el cálculo de errores.

Las densidades lineales eran, a primera aproximación, las mismas en todas las placas que se revelaron durante el mismo tiempo; pero las variaciones estadísticas eran grandes e irregulares, de modo que pareció preferible admitir que en todas las placas con el mismo tiempo de revelado la densidad lineal fuera la misma; la densidad lineal se calculó, pues, a partir de todas las medidas hechas sobre placas con el mismo tiempo de revelado.

Este procedimiento probablemente hace aparecer demasiado elevadas las densidades lineales en placas con un fondo denso, en las cuales el revelarse muchos granos del fondo en la vecindad ha de empobrecer el revelador que llega a los granos de la traza. Para tener en cuenta este efecto, (parecido al efecto Eberhard), se aumentaron los límites de error proporcionalmente a la densidad del fondo.

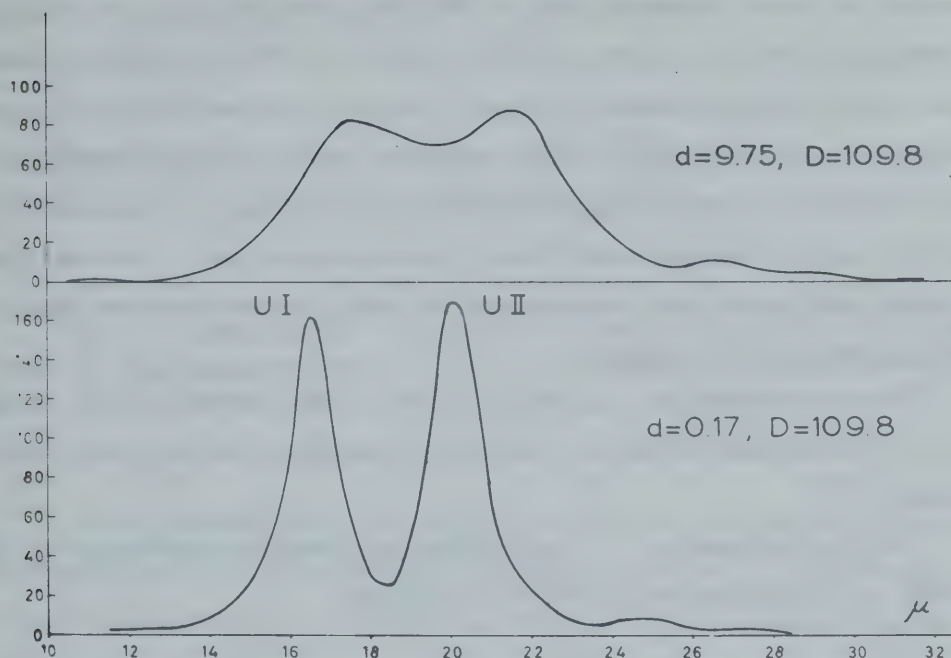


Fig. 2 Distribución de alcances en dos placas. Densidad lineal 109.8 granos/ 100μ . Abajo, densidad del fondo 0.17 granos/ $100 \mu^2$.

III

Los resultados obtenidos se pueden resumir de la manera siguiente:

(i) La densidad del fondo parece aumentar proporcionalmente al tiempo de revelado, mientras las trazas se revelan lentamente al principio, y mucho más rápidamente al aumentarse el tiempo. Esta conclusión no es sino tentativa, aunque los experimentos de Gailloud y Haenny (1952) sobre el subrevelado indican una diferencia en la naturaleza de las imágenes latentes de fondo y trazas. Coates (1951) sin

embargo encuentra un crecimiento lineal no solamente del fondo, sino también de la densidad lineal en las trazas; pero sus resultados experimentales no son muy extensas sobre este punto y, además, se refieren a trazas del mínimo de ionización

(ii) Las cinco gráficas de la figura 3 muestran los principales resultados en cuanto a la corrección de los alcances en función de las dos densidades lineal y del fondo. Las rectas son las calculadas a partir de la fórmula de corrección obtenidas en I. En las regiones centrales que son las interesantes para la mayoría de trabajos con placas nucleares parecen adaptarse bastante bien a los resultados experimentales. Hay una limitación, obvia además a partir de consideraciones elementales: para cualquier densidad de fondo, las trazas pueden parecer más cortas que las trayectorias de las partículas causándolas; pero para cada densidad de fondo hay un límite al aumento aparente del alcance en función de la densidad lineal, después del cual los valores resultan más o menos constantes. Este efecto es evidente sobre todo para la más baja densidad de fondo, donde no se nota ningún alargamiento aparente de las trazas.

Debido a este efecto, quedaron solamente cuatro determinaciones en los dos grupos de baja densidad del fondo, las cuales se podían tomar en cuenta para el cálculo de χ^2 .

(iii) Los valores de χ^2 calculados para las cinco gráficas y las probabilidades que les corresponden son los siguientes:

d	múmero de valores	χ^2	P (χ^2)
0.17 gr/100 μ^2	4	1.01	91 %
2.53 "	4	1.51	83 "
5.71 "	7	3.26	87 "
9.75 "	5	3.12	68 "
15.26 "	4	3.06	55 "

Los primeros tres grupos verifican, dentro de los límites de error bastante anchos, la fórmula de corrección dada en I. Los resultados divergentes para los dos últimos se deben a la falla de linealidad, como se ve en las gráficas; de hecho ambos casos acusan cierta concavidad hacia el eje de las densidades lineales.

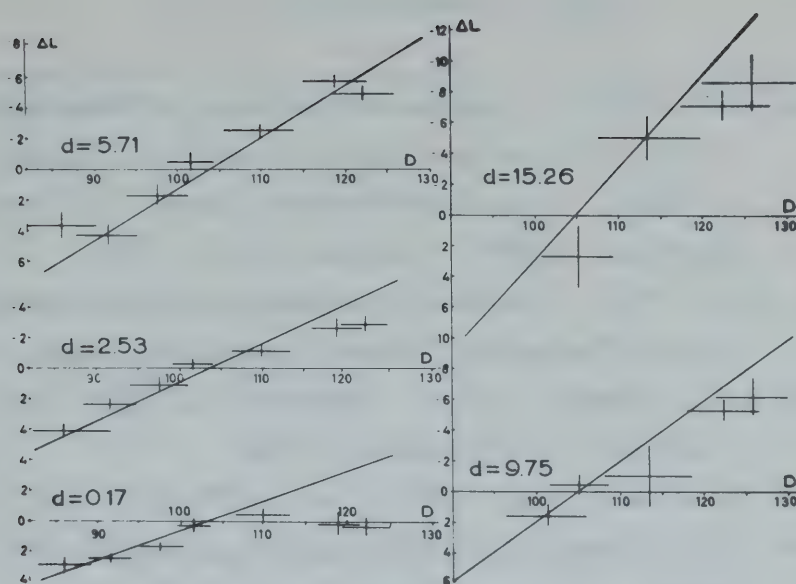


Fig. 3 Correcciones ΔL a los alcances en función de la densidad lineal D para 5 densidades del fondo. Las rectas representan la fórmula empírica obtenida en I.

IV

Se puede concluir que los experimentos aquí presentados verifican en primera aproximación la fórmula de corrección deducida en I. Es deseable, en vista de los límites de error muy amplios, tratar de mejorar estos resultados, y nos proponemos extender los experimentos en los siguientes sentidos: (i) Consideraciones de la cinética del revelado sugieren que a más bajas temperaturas la interferencia mutua entre el revelado y las trazas y el del fondo debe ser menor; se intentará por lo tanto una serie empleando el método de revelado (de Yagoda (1955)) enteramente a baja temperatura. (ii) Usando placas menos gruesas, trazas quedarán visibles para densidades del fondo más elevadas, a las cuales la comprobación se podrá extender de esta manera. (iii) Midiendo un número más importante de trazas, la estadística se puede mejorar y los límites de error se pueden reducir; pero en vista de la naturaleza muy tediosa de estas medidas, extender los experimentos en este sentido mucho más allá de lo que se ha hecho (2920 trazas medidas) representaría un esfuerzo desproporcionado a la utilidad de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

- Berriman, R. W. (1951) : Fundamental Mechanisms of Photographic Sensitivity, (Proceedings of Bristol Symposium) , London, p. 272.
- Brody, T. A. (1950) : Tesis, Ecole Polytechnique de l' Université de Lausanne. (1954) : Rev. Mex. Fís. **3**, 217.
- Coates, A. C. (1951) : Fundamental Mechanisms of Photographic Sensitivity, (Proceedings of Bristol Symposium) , London, p. 320.
- Dilworth, C. C. Occhialini, G. P. S. y Vermaesen, L. (1950) : Bull. C. Phys nucl. Univ. Libre Bruxelles, # 13a.
- Gailloud, M. y Haenny, C. B. (1952) : Sci. Ind. Phot. (2) , **23**, 221.
- Libowitz, G. G. y Bauer, S. H. (1955) : J. Phys. Chem, **59**, 209 .
- Najar, N. (1949) : Bull. Soc. Vaudoise Sci. Nat. ; **64**, 367.
- Rochat. O. (1949) : Men. Soc. Vaudoise Sci. Nat. , **9**, 195 .
- Yagoda, H. (1955) : Rev. Sci. Inst. , **26**, 263 .

SOBRE LA ESTRUCTURA DE LA RADICININA

Octavio Cano Corona

RESUMEN

Se presentan resultados sobre trabajos encaminados hacia la determinación de la estructura de la radicina, de ella se han estudiado dos derivados, el monoclóro y el dibromo de los que se han determinado las dimensiones de las celdas elementales y la simetría. Se han calculado los $|F_{okl}|^2$ para ambos compuestos a partir de las placas Weissenberg con reflexiones de índices okl . De los valores $|F_{okl}|^2$ se obtuvieron síntesis de - - Patterson.

El presente problema ha sido proporcionado al autor por el Prof. R. Pepinsky de la Universidad del Estado de Pensilvania y fué trabajado parcialmente durante su estancia en esa Universidad.

La radicina¹ ($C_{12}H_{12}O_5$), es un nuevo pigmento producido por el honggo *Stemphylium Radicinum*.

Han sido estudiados dos derivados, el monoclóro ($C_{12}H_{11}O_5.Cl$) y el dibromo ($C_{12}H_{10}O_5.Br_2$).

En la figura 1 se muestra la fórmula probable del dibromo.

Celdas elementales. La determinación de las dimensiones de las celdas elementales y ángulos se hizo mediante placas de rotación y de Weissenberg emple

ando radiación filtrada de un tubo de ánodo de Cu.

Ambos cristales son ortorrómbicos y sus parámetros son:

$$\begin{aligned} a &= 5.95 \text{ \AA} \\ \text{Rad. Cl} \quad b &= 9.74 \text{ \AA} \\ c &= 25.15 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

4 moléculas por celda

$$\begin{aligned} a &= 5.46 \text{ \AA} \\ \text{Rad. Br}_2 \quad b &= 10.70 \text{ \AA} \\ c &= 25.42 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

4 moléculas por celda.

La densidad del dibromo fué determinada experimentalmente por el método del picnómetro y se obtuvo $1.75 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$. Por otra parte, la densidad teórica calculada a partir de los datos anteriores es de $1.76 \frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$.

Simetría. Puesto que las placas Weissenberg, de ambos compuestos presentan extinciones sistemáticas para las reflexiones de índices $h00$, $0k0$ y $00l$; para h , k , y l impares y no hay extinciones sistemáticas en placas de otros niveles, el grupo espacial es en ambos casos $P2_1^2_1^2_1$.

La verdad del resultado anterior se aprecia del hecho que la intensidad de una reflexión I_{hkl} , corregida por los factores de Lorentz y polarización, es proporcional al cuadrado del módulo del factor de estructura, es decir:

$$I_{hkl} = |F_{hkl}|^2 \quad (1)$$

en donde:

$$F_{hkl} = \sum_a e^{2\pi i(hx_a + ky_a + lz_a)} \quad (2)$$

Esta suma se hace a todos los átomos de la celda, las coordenadas d e cuyos centros son x_a, y_a, z_a que están medidas respectivamente en unidades de a, b y c .

Consideremos la suma anterior desarrollada en sumas parciales.

$$F_{hkl} = \sum_{a'} e^{2\pi i(hx_{a'} + ky_{a'} + lz_{a'})} + \sum_{a''} e^{2\pi i(kx_{a''} + ly_{a''} + lz_{a''})} + \dots \quad (3)$$

DIBROMO DE RADICININA

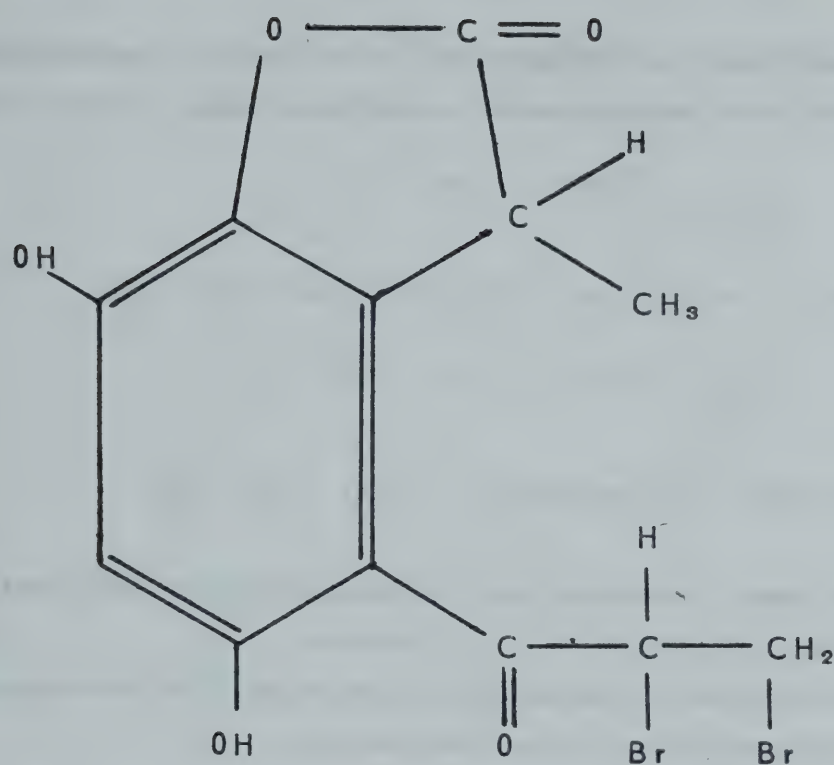


Fig. 1

Cada suma parcial se hace sobre un átomo y los átomos equivalentes a él bajo las operaciones del grupo espacial.

El grupo espacial $P2_1 2_1 2_1$ se genera por la acción de tres ejes de tornillo mutuamente ortogonales aunque no concurrentes y los puntos equivalentes bajo las operaciones del grupo, son:

$$x, y, z ; \quad \frac{1}{2} - x, \bar{y}, \frac{1}{2} + z ; \quad \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - y ; \quad \bar{z}, \bar{x}, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z$$

Substituyendo estas coordenadas en cada una de las sumas parciales de (3) y haciendo las reducciones correspondientes, se tiene para la primera,

$$\begin{aligned} R \left[\sum_{a'} e^{2\pi i (hx_{a'} + ky_{a'} + lz_{a'})} \right] &= \\ &= 4 \cos 2\pi \left(hx - \frac{h-k}{4} \right) \cos 2\pi \left(ky - \frac{k-l}{4} \right) \cos 2\pi \left(lz - \frac{l-h}{4} \right) \\ I \left[\sum_{a''} e^{2\pi i (hx_{a''} + ky_{a''} + lz_{a''})} \right] &= \\ &= -4 \sin 2\pi \left(hx - \frac{h-k}{4} \right) \sin 2\pi \left(ky - \frac{k-l}{4} \right) \sin 2\pi \left(lz - \frac{l-h}{4} \right) \end{aligned}$$

Se ve por inspección que estas dos últimas expresiones se anulan para los valores $h=0, k=0, y l=0$ siendo h, k y l impares.

En el presente caso la determinación del grupo espacial es unívoca porque no existe otro de ellos que produzca las mismas extinciones.

Funciones de Patterson. Se hicieron mediciones visuales de las intensidades de las reflexiones en respectivos grupos de 10 placas Weissenberg tomadas simultáneamente para cada uno de los grupos.

Las intensidades fueron corregidas por los factores de Lorentz y polarización obteniéndose los valores de los $|F_{okl}|^2$, a partir de los que se calcularon las síntesis de Patterson.

$$P_{okl}(x, y) = \sum_k \sum_l |F_{okl}|^2 \cos 2\pi(ky + lz)$$

Los valores máximos de k y l para las reflexiones observadas en el monocloro y dibromo son respectivamente 9 y 22 y 9 y 24.

Las figuras 2 y 3 muestran respectivamente las funciones $P_{okl}(y,z)$ para el monocloro y el dibromo con los orígenes en las esquinas. Fueron obtenidas por el Prof. Ray Pepinsky en el calculador X- Rac de la Universidad del Estado de Pensilvania.

REFERENCIAS

1. D.D. Clarke y F. F. Nord, Arch.Biochem.Biophys. 45, 469-70 (1953).
2. Internationale Tabellen, Tomo 1, p. 120.



Fig. 2 La función $P_{okl}(y, z)$ para el monocloro de radicinin, con el origen en las esquinas.



Fig. 3 La función $P_{okl}(y, z)$ para el dibromo de radicnina con el origen en las esquinas,

LAS FUERZAS GRAVITACIONALES DE BIRKHOFF EN EL
ESPACIO FISICO.

C. Graef Fernández.

La teoría de la gravitación de Birkhoff¹ se desarrolló en el espacio-tiempo llano de Minkowski. El instrumento matemático más adecuado para su análisis es la geometría pseudoeuclidiana de cuatro dimensiones correspondiente a la métrica² definida por el cuadrado del elemento de arco:

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2 . \quad (1)$$

Aquí $x^1 \equiv t$ es el tiempo, y x^2, x^3, x^4 , son las tres coordenadas espaciales x, y, z , en ese orden.

La velocidad de la luz en el vacío se elige igual a uno, midiendo las distancias en el espacio físico en segundos-luz y los tiempos en segundos.

Para la interpretación física de los resultados matemáticos no es la geometría pseudoeuclidiana de cuatro dimensiones la más adecuada. Los cuadvectores de la velocidad, la aceleración, la fuerza y la cantidad de movimientos no tienen la misma nitidez intuitiva que los correspondientes vectores del espacio físico de tres dimen-

siones. Tampoco se presta la geometría pseudoeuclidiana de cuatro dimensiones para la estimación de órdenes de magnitud de los distintos términos. El cuadrivector velocidad tiene por magnitud uno, independientemente de la magnitud del vector velocidad en el espacio físico. Cuando una partícula tiene una velocidad moderada comparada con la velocidad de la luz, la primera componente del cuadrivector velocidad es aproximadamente igual a uno, y las otras tres componentes son muy pequeñas. Conviene expresar la teoría de la Gravitación de Birkhoff en el espacio físico de tres dimensiones para comparar sus resultados con los Newtonianos. En el espacio físico se perciben además relaciones que no se habían visto en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

El cuadrivector fuerza por unidad de masa de una partícula exploradora de un campo gravitacional de Birkhoff³ es:

$$f_i = \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} . \quad (2)$$

Este cuadrivector es idéntico al cuadrivector aceleración. Las componentes contravariantes son:

$$f^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} . \quad (3)$$

La relación entre las componentes contravariantes y las covariantes se establece con el tensor⁴ métrico fundamental de la teoría de la Relatividad Especial:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$f_i = \Delta_{ij} f^j$$

$$f_1 = f^1 ; f_2 = -f^2 ; f_3 = -f^3 ; f_4 = -f^4 .$$

De las ecuaciones (2) y (4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^1}{ds^2} &= + \left(\frac{\partial h_{1i}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^1} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \\ \frac{d^2 x^a}{ds^2} &= - \left(\frac{\partial h_{ai}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^a} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}\end{aligned}\quad (5)$$

$$a = 2, 3, 4.$$

Nuestro propósito es expresar con respecto al tiempo las segundas derivadas de las coordenadas del espacio físico x, y, z , en función de las derivadas parciales del tensor potencial gravitacional h_{ij} y de las componentes del vector velocidad. Con este objeto tenemos que transformar derivadas con respecto al arco s en derivadas con respecto al tiempo $t \equiv x^1$.

Por brevedad usamos un acento para las derivadas con respecto a s y un punto para las derivadas con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}\dot{x}^a &= \frac{x^{a'}}{t'} \\ \ddot{x}^a &= \frac{x^{a''}}{t'^2} - \frac{x^{a'}}{t'} \cdot \frac{t''}{t'^2}\end{aligned}\quad (6)$$

$$a = 2, 3, 4.$$

Hay que recordar que:

$$t'' = \frac{d^2 x^1}{ds^2}$$

De las ecuaciones (6) y (5) se obtiene:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = \begin{cases} \left(\frac{\partial h_{ai}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^a} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k \\ \left(\frac{\partial h_{1i}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \right) \dot{x}^a \dot{x}^i \dot{x}^k \end{cases}\quad (7)$$

$$a = 2, 3, 4.$$

Es pertinente establecer la convención de que los índices griegos adquirirán los valores 2, 3, 4, los índices latinos tendrán los valores 1, 2, 3, 4. La convención de Einstein sobre los índices repetidos se aplicará tanto a los índices latinos como a los griegos.

En la ecuación (7) conviene separar el tiempo $t = x^1$ de las coordenadas espaciales x, y, z .

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial h_{a1}}{\partial t} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^a} \right) \\ + \left(\frac{\partial h_{a1}}{\partial x^\beta} - 2 \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial x^a} + \frac{\partial h_{a\beta}}{\partial t} \right) \dot{x}^\beta \\ + \left(\frac{\partial h_{a\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^a} \right) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ + \left(\frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial t} - \frac{\partial h_{11}}{\partial x^\beta} \right) \dot{x}^a \dot{x}^\beta \\ + \left(\frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial t} - \frac{\partial h_{\beta 1}}{\partial x^\gamma} \right) \dot{x}^a \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \end{array} \right. \quad (8)$$

Se observa que la aceleración en el espacio físico en la teoría de Birkhoff es una función de tercer grado de las componentes del vector velocidad.

Para construir una teoría genuina de la gravitación en el espacio físico es necesario traducir las componentes del tensor potencial gravitacional h_{ij} .

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Un cambio de orientación de los ejes espaciales x, y, z es una transformación de Lorentz muy especial. En un cambio tal la componente h_{11} permanece invariante; las componentes $h_{12} = h_{21}$; $h_{13} = h_{31}$ y $h_{14} = h_{41}$ se transforman como las componentes de un vector del espacio físico. El esquema:

$$\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

se transforma como un tensor del espacio físico. En los cambios de orientación puros de los ejes coordenados del espacio físico h_{11} se porta como un escalar la terna h_{12}, h_{13}, h_{14} se porta como un vector; la matriz

$$\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}$$

se porta como un tensor. Se justifica entonces describir al campo gravitacional en el espacio físico por medio de un potencial escalar Φ , de un potencial vectorial $\vec{P}$ y de un potencial tensorial T definidos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv h_{11}; \\ \vec{P} &= (P^x, P^y, P^z) = (h_{12}, h_{13}, h_{14}), \\ T &= \begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Como consecuencia de la simetría del tensor h_{ij} se tiene:

$$\begin{aligned}
P^x &= h_{12} = h_{21} ; \\
P^y &= h_{13} = h_{31} ; \\
P^z &= h_{14} = h_{41} ; \\
T^{xy} &= T^{yx} = h_{23} = h_{32} ; \\
T^{xz} &= T^{zx} = h_{24} = h_{42} ; \\
T^{yz} &= T^{zy} = h_{34} = h_{43} .
\end{aligned} \tag{11}$$

De la ecuación (8) se obtiene para las tres componentes del vector aceleración en el espacio físico:

[Ecuaciones (12)]

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_x + \mathbf{L}_x + \mathbf{Q}_x + \mathbf{C}_x .$$

$$\mathbf{I}_x = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}^x}{\partial t} \right)$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{P}^x}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ + \left(2 \frac{\partial P^y}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{y} \\ + \left(2 \frac{\partial P^z}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{z} \end{cases}$$

$$\mathbf{Q}_x = \begin{cases} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}^x}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \\ + \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \right) \dot{x} \dot{y} \\ + \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \right) \dot{x} \dot{z} + \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \right) \dot{y}^2 \\ + \left(2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \right) \dot{y} \dot{z} + \left(\frac{\partial T^{zz}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \right) \dot{z}^2 \end{cases}$$

$$C_x = \left\{ \begin{aligned} &+ \left(-\frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^3 \\ &+ \left(-\frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{y} \\ &+ \left(-\frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{z} \\ &+ \left(-\frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y}^2 \\ &+ \left(-\frac{\partial P^y}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ &+ \left(-\frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{z}^2 \end{aligned} \right.$$

$$\ddot{y} = I_y + L_y + Q_y + C_y .$$

$$I_y = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial t} \right)$$

$$L_y = \left\{ \begin{aligned} &+ \left(2 \frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ &+ \left(\frac{\partial P^y}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y} + \left(2 \frac{\partial P^z}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{z} \end{aligned} \right.$$

$$Q_y = \left\{ \begin{aligned} &+ \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \right) \dot{x}^2 \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial P^x}{\partial t} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{y} \\ &+ \left(2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{z} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \\ &+ \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \right) \dot{y} \dot{z} + \left(\frac{\partial T^{zz}}{\partial y} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \right) \dot{z}^2 \end{aligned} \right.$$

$$C_y = \left\{ \begin{aligned} & + \left(-\frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{y} \\ & + \left(-\frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y}^2 \\ & + \left(-\frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ & + \left(-\frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y}^3 \\ & + \left(-\frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \dot{z} \\ & + \left(-\frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{y} \dot{z}^2 \end{aligned} \right.$$

$$\mathcal{H} = I_z + L_z + Q_z + C_z$$

$$I_z = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial t} \right)$$

$$L_z = \left\{ \begin{aligned} & + \left(2 \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \\ & + \left(2 \frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y} \\ & + \left(\frac{\partial P^z}{\partial z} - \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{z} \\ & + \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial z} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \right) \dot{x} \end{aligned} \right.$$

$$Q_z = \left\{ \begin{aligned} & + \left(2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} - \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \right) \dot{x} \dot{y} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial P^x}{\partial t} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} - \frac{\partial T^{zz}}{\partial x} \right) \dot{x} \dot{z} \\ & + \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial z} - \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \right) \dot{y}^2 + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P^y}{\partial t} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} - \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} \right) \dot{y} \dot{z} + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial P^z}{\partial t} \right) \dot{z}^2 \end{aligned} \right.$$

$$C_z = \left\{ \begin{aligned} &+ \left(- \frac{\partial P^x}{\partial x} + \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \right) \dot{x}^2 \dot{z} \\ &+ \left(- \frac{\partial P^x}{\partial y} - \frac{\partial P^y}{\partial x} + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} \\ &+ \left(- \frac{\partial P^x}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial x} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \right) \dot{x} \dot{z}^2 \\ &+ \left(- \frac{\partial P^y}{\partial y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \right) \dot{y}^2 \dot{z} \\ &+ \left(- \frac{\partial P^y}{\partial z} - \frac{\partial P^z}{\partial y} + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \right) \dot{y} \dot{z}^2 \\ &+ \left(- \frac{\partial P^z}{\partial z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \right) \dot{z}^3 \end{aligned} \right.$$

Para poder condensar las ecuaciones (12) a una forma manejable conviene utilizar la notación vectorial siguiente:

Fórmulas (13):

Vector aceleración $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$;

Vector velocidad $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$;

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{v} = P^x \dot{x} + P^y \dot{y} + P^z \dot{z} ;$$

$$\nabla \vec{P} \cdot \vec{v} = \left(\begin{aligned} &\frac{\partial P^x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial x} \dot{z} \\ &\frac{\partial P^x}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial y} \dot{z} ; \\ &\frac{\partial P^x}{\partial z} \dot{x} + \frac{\partial P^y}{\partial z} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial z} \dot{z} \end{aligned} \right) \cdot$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \nabla) \vec{P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \frac{\partial P^x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^x}{\partial z} ; \\ \dot{x} \frac{\partial P^y}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^y}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^y}{\partial z} ; \\ \dot{x} \frac{\partial P^z}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial P^z}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial P^z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$T \vec{v} = \begin{pmatrix} T^{xx} \dot{x} + T^{xy} \dot{y} + T^{xz} \dot{z} ; \\ T^{yx} \dot{x} + T^{yy} \dot{y} + T^{yz} \dot{z} ; \\ T^{zx} \dot{x} + T^{zy} \dot{y} + T^{zz} \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial T \vec{v}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial t} \dot{z} ; \\ \frac{\partial T^{yx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial t} \dot{z} ; \\ \frac{\partial T^{zx}}{\partial t} \dot{x} + \frac{\partial T^{zy}}{\partial t} \dot{y} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial t} \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$[(\vec{\nabla} \cdot \nabla) T \vec{v}]^x = \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{pmatrix}$$

$$[(\vec{\nabla} \cdot \nabla) T \vec{v}]^y = \begin{pmatrix} \frac{\partial T^{yx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{yx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ + \frac{\partial T^{yx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{pmatrix} ;$$

$$[(\vec{\nabla} \cdot \nabla) T \vec{v}]^z = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial T^{zx}}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial T^{zy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \\ & + \frac{\partial T^{zx}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial T^{zy}}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \\ & + \frac{\partial T^{zx}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{zy}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{aligned} \right]$$

$$(T \vec{v}) \cdot \vec{v} = T^{xx} \dot{x}^2 + 2 T^{xy} \dot{x} \dot{y} + 2 T^{xz} \dot{x} \dot{z} + T^{yy} \dot{y}^2 + 2 T^{yz} \dot{y} \dot{z} + T^{zz} \dot{z}^2 ;$$

$$\nabla [(T \vec{v}) \vec{v}] = \left[\begin{aligned} & \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial x} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial x} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial x} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial x} \dot{z}^2 \\ & \frac{\partial T^{xx}}{\partial y} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial y} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial y} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial y} \dot{z}^2 \\ & \frac{\partial T^{xx}}{\partial z} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial T^{xy}}{\partial z} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial T^{xz}}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial z} \dot{y}^2 + 2 \frac{\partial T^{yz}}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial T^{zz}}{\partial z} \dot{z}^2 \end{aligned} \right]$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \nabla) (\vec{P} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \left[\begin{aligned} & \frac{\partial P^x}{\partial x} \dot{x}^2 + \frac{\partial P^y}{\partial x} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial P^z}{\partial x} \dot{x} \dot{z} \\ & + \frac{\partial P^x}{\partial y} \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial P^y}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial P^z}{\partial y} \dot{y} \dot{z} \\ & + \frac{\partial P^x}{\partial z} \dot{x} \dot{z} + \frac{\partial P^y}{\partial z} \dot{y} \dot{z} + \frac{\partial P^z}{\partial z} \dot{z}^2 \end{aligned} \right]$$

Con esta notación se condensan las ecuaciones (12) a una ecuación:

$$\vec{a} = \left[\begin{aligned} & \nabla \Phi - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{P} + 2 \nabla (\vec{P} \cdot \vec{v}) \\ & - \frac{\partial T}{\partial t} \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) (T \vec{v}) + \nabla [(T \vec{v}) \cdot \vec{v}] \\ & - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) \Phi + \vec{v} \frac{\partial \vec{P} \cdot \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla) (\vec{P} \cdot \vec{v}) \\ & + \vec{v} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial t} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} \right] \end{aligned} \right] \quad (14)$$

Considérese una partícula exploradora del campo gravitacional de Birkhoff. Como el potencial vectorial $\vec{P}$ y el potencial tensorial T son funciones de las coordenadas x, y, z , y del tiempo t estas dos cantidades varían a lo largo de la trayectoria de la partícula. Al pasar ésta de la posición x, y, z que ocupa en el tiempo t , a la posición $x + dx, y + dy, z + dz$ que ocupa en el tiempo $t + dt$, el potencial vectorial pasa de un valor inicial $\vec{P}$ a un valor final $\vec{P} + d\vec{P}$. Designamos con:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \text{ y } \frac{dT}{dt}$$

a las "derivadas sustanciales con respecto al tiempo" en el sentido de Euler. La derivada $\frac{d\vec{P}}{dt}$ es la rapidez con la que varía el potencial vectorial al moverse la partícula, y $\frac{dT}{dt}$ es la rapidez con la que varía el potencial tensorial.

La ecuación (14) se simplifica mucho si en vez de expresar la aceleración en función de los potenciales escalar, vectorial y tensorial, se expresa en esos términos el vector

$$\vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{1 - v^2}$$

Aquí v^2 es el cuadrado del vector velocidad $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

Se obtiene:

$$\vec{a} + \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{v})}{1 - v^2} = \begin{cases} V [\Phi + 2 \vec{P} \cdot \vec{v} + (T \vec{v}) \cdot \vec{v}] \\ - \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{dT}{dt} \vec{v} \end{cases} \quad (15)$$

Para las derivadas substanciales se tiene:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{P}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T .$$

La ecuación (15) es la ecuación del movimiento de una partícula exploradora en el campo gravitacional de Birkhoff descrito por su potencial escalar Φ , su potencial vectorial $\vec{P}$ y su potencial tensorial T . Obsérvese que el primer miembro de la ecuación (15) se puede expresar como:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} - \sqrt{1 - v^2} = \vec{a} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{1 - v^2} \vec{v} .$$

REFERENCIAS

1. G. D. Birkhoff. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1, 1 - 23 (1944)
2. G. D. Birkhoff. locus cit. página. 10.
3. G. D. Birkhoff. locus cit. página. 15.
4. C. Graef Fernández. Revista Mexicana de Física. 2, 181, 182. (1953)

SOBRE LA DISTRIBUCION DE LOS POLOS DE LA MATRIZ S
EN EL MODELO OPTICO DEL NUCLEO

Juan M. Lozano.

Es bien conocida la importancia que la matriz S tiene en la teoría de las reacciones nucleares, y el hecho de que la distribución de los polos de dicha matriz da valiosa información sobre las posibilidades de dar una descripción causal del proceso que se estudia. En trabajos anteriores¹ se ha estudiado detalladamente la relación entre los polos de la matriz S y la descripción dinámica de la dispersión nuclear.

Entonces, tiene interés estudiar la distribución de polos para el caso del modelo óptico del núcleo que ha sido propuesto recientemente por Feshbach, Porter y Weisskopf² y que consiste en suponer que la interacción entre la partícula incidente y el núcleo blanco, se hace por medio de un potencial complejo, con lo cual se encuentra cierta posibilidad de absorción.

Usando unidades naturales $\hbar = c = m = 1$, la ecuación de onda es:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi + V \psi = E \psi$$

Si se pone:

$$\psi = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

la ecuación para la parte radial de la función de onda es:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l + [E - V(r)] u_l = 0. \quad (1)$$

Se introduce el número de onda k como $E = \frac{1}{2} k^2$. Suponiendo que el potencial $V(r)$ es un potencial de corto alcance, esto es,

$$V(r) = \begin{cases} V(r) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Se obtiene, multiplicando la ecuación (1) por u_l^* a la izquierda, multiplicando la conjugada de la ecuación (1) por u_l a la izquierda, restando e integrando entre cero y a .

$$u_l^*(r) u_l'(r) - u_l(r) u_l'^*(r) \Big|_0^a = - \int_0^a \{ (k^2 - k^{*2}) - 2(V - V^*) \} u_l(r) u_l^*(r) dr.$$

Dividiendo ahora entre $u_l'(a) u_l'^*(a)$ ambos miembros y teniendo en cuenta que $u_l(0) = u_l'(0) = 0$, se obtiene:

$$\left[\frac{u_l}{u_l'} - \frac{u_l^*}{u_l'^*} \right]_a = (k^2 - k^{*2}) \frac{\int_0^a |u_l(r)|^2 dr}{|u_l'(a)|^2} - 4 \frac{\int_0^a \text{Im } V |u_l(r)|^2 dr}{|u_l'(a)|^2}$$

Es obvio que la función $R_l(k^2)$ es una función meromorfa de su argumento y que el duplo de su parte imaginaria está dada por la ecuación (2). Se supondrá ahora que el potencial es un pozo cuadrado, entonces $\text{Im } V$ no depende de r en el intervalo $(0, a)$.

Multiplicando la parte imaginaria de la función $R_l(k^2)$ por $\text{Im } k^2$, se tiene:

$$\operatorname{Im} k^2 \operatorname{Im} R(k^2) = [(\operatorname{Im} k^2)^2 - 2 \operatorname{Im} V \operatorname{Im} k^2] \frac{\int_0^a |u_l|^2 dr}{|u_l'(a)|^2} \quad (4)$$

Poniendo:

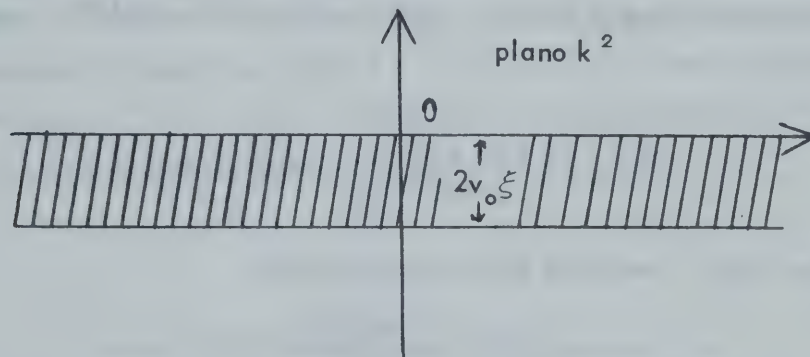
$$V = -V_0 (1 + i\xi) \quad V_0, \xi > 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} V = -V_0 \xi < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación (4) indica que:

$$\operatorname{Im} k^2 \operatorname{Im} R(k^2) > 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{Im} k^2 > 0 \quad \text{ó} \quad |\operatorname{Im} k^2| > 2 |\operatorname{Im} V| = 2V_0 \xi$$

Ahora bien, por definición de función R de Wigner³, la función $R_l(k^2)$ no es función R de Wigner en una cierta faja del plano complejo de la energía, según se indica en la figura.



Este hecho tiene gran repercusión en la distribución de los polos de la matriz S del problema, pues como se ha indicado en un trabajo anterior¹, en el que la función $R_l(k^2)$ era de Wigner en todo el plano, las propiedades analíticas de dicha función de Wigner, determinan la zona del plano complejo k en que pueden encontrarse polos de la matriz S .

En adelante, por simplicidad del argumento, se considerará sólo el caso particular $l = 0$.

La ecuación de onda en este caso es:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + (k^2 - 2V) u = 0 \quad r < a \quad (6)$$

y

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad r > a$$

Poniendo $K^2 = k^2 - 2V$, la solución para $r < a$ es:

$$u = C \sin K r, \quad (7a)$$

y para $r > a$, por el formalismo de la matriz S , la solución se puede poner:

$$u = -\frac{1}{2i} [\exp(-ikr) - S(k) \exp(ikr)] \quad (7b)$$

Pero la solución debe cumplir las condiciones de continuidad en el punto $r = a$, esto relaciona la función $S(k)$ con la función $R(k^2)$ en la forma siguiente:

$$S(k) = \frac{1 + ik R(k^2)}{1 - ik R(k^2)} \exp(-2ika). \quad (8)$$

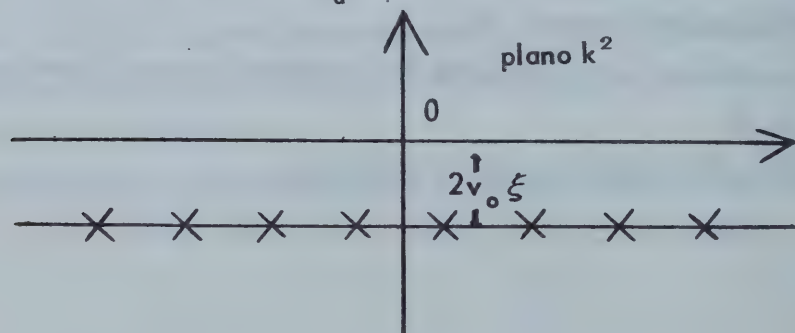
La función $R(k^2)$ es, para este caso particular,

$$R = a \frac{\tan K a}{K a},$$

y tiene polos en $Ka = (n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$

En el plano k^2 por la definición de K , los polos de $R(k^2)$ están en:

$$k^2 = \frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}{a^2} + 2V$$



Si el potencial no tuviera parte imaginaria, esto es, $\xi = 0$, los polos de la función $R(k^2)$ estarían sobre el eje real, como en toda función de R de Wigner

De la ecuación (8), se sigue que los polos de la función $S(k)$ están en las soluciones de:

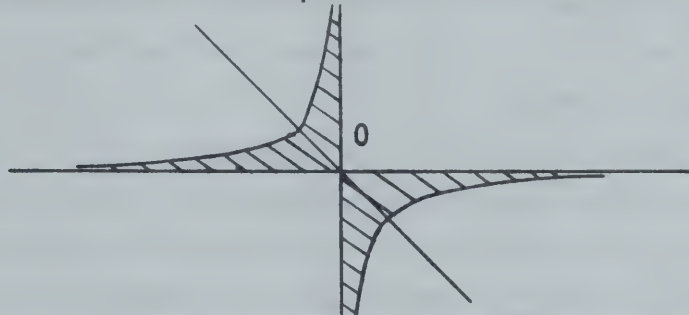
$$1 - ikR(k^2) = 0$$

o sea en
$$R = \frac{-i(k_x - ik_y)}{|k|^2}$$

Multiplicando la parte imaginaria de la Función R por la parte imaginaria de su argumento, se obtiene:

$$\text{Im } k^2 \text{ Im } R \approx -2 \frac{k_x^2}{|k|^2} k_y \quad (9)$$

Entonces, en la zona del plano complejo k que corresponde a la zona del plano complejo k^2 en que la función $R(k^2)$ es de Wigner, los polos de la función $S(k)$ cumplen la condición $k_y < 0$ ó $k_x = 0$. Pero la zona del plano k en que la función $R(k^2)$ no es de Wigner está comprendido entre los ejes de coordenadas y las dos ramas de una hipérbola.



Pero en todo el cuarto cuadrante la ecuación (9) es positiva y en la zona en que la función $R(k^2)$ no es R de Wigner, debe ser negativa, de lo cual se sigue que en esa región no puede haber polos $S(k)$. En conclusión, la función $S(k)$ sólo puede tener polos en la parte de abajo del plano complejo excepto una zona entre los ejes y la hipérbola, o en una zona de la parte de arriba del plano en la cual está contenida el eje imaginario. Desde el punto de vista físico, es de extraordinaria importancia el hecho de que no haya polos en el primer cuadrante, pues si los hubiera, sería imposible una descripción causal porque aparecerían estados

que crecerían con el tiempo. Los polos situados en el cuarto cuadrante y arriba de una recta a 45° , dan lugar a estados causi-estacionarios de emisión⁴, mientras que los situados en el segundo cuadrante abajo de una recta a 45° representan estados causi-estacionarios de absorción y son típicos del potencial complejo.

REFERENCIAS

1. J.M. Lozano, Rev.Mexicana de Fis. 2, 155, (1953)
2. H. Feshbach, C. Porter y V. Weisskopf, Phys.Rev. 96, 448, (1954)
3. E.P. Wigner, Ann.of Math 53, 36, (1951)
4. J.M. Lozano, Rev.Mexicana de Fis. 3, 63, (1954)

DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR UNA GOTA DE LIQUIDO

Marcos Moshinsky

RESUMEN

The present paper deals with the scattering of sound waves in a gas, by liquid drops or soap bubbles. The main interest of this analysis lays in the insight it gives on the problem of scattering of nucleons by collective motions according to the model of Aage Bohr. We first discuss the equations and boundary conditions that characterize the scattering, both for the case of a liquid drop and for the case of a soap bubble. For a liquid drop, the function relating the sound wave potential and its normal derivative, at the surface of the drop, has just one resonance for each spherical harmonic, and its behavior as a function of frequency and l is discussed.

The case of the soap bubble would be a more realistic approach to nuclear case, as we would have the natural frequencies of vibration of the air inside the soap bubble and of the soap bubble itself. The effect of the soap bubble on the position of the resonances and their widths, (defined in a way similar to the nuclear

scattering problem) is discussed in detail. The extension of the viewpoints developed here to the nuclear case mentioned above, will be given in a following publication.

I. INTRODUCCION

El presente trabajo versará sobre la dispersión de las ondas sonoras por una gota de líquido, y también sobre el problema similar de dispersión por una pompa de jabón. El interés de estos problemas radica principalmente en las ideas que sugieren para el análisis de la dispersión de nucleones por los movimientos colectivos de los núcleos¹. En un artículo posterior desarrollaremos estas ideas en lo que a su aplicación a la Física Nuclear se refiere, ya que en el presente trabajo nos referiremos solo a los aspectos del problema indicados en este párrafo.

En el caso de la dispersión de ondas sonoras por una gota de líquido, tenemos el problema de dos medios en contacto, el líquido en forma de una esfera de radio "a" con centro en el origen, y el gas que lo rodea. En la superficie de frontera entre los dos medios tenemos la acción de la tensión superficial de la gota.

Supondremos que la presión y densidad del gas, en ausencia de disturbios externos, son P_{eo} y ρ_{eo} respectivamente, donde el índice e es para indicar que se trata del medio exterior a la gota. Si tenemos una onda sonora en el gas, cuya propagación se efectúa en forma adiabática, se tiene que la ecuación de estado del gas ligando las nuevas presiones y densidades es²:

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad \gamma \text{ relación de calores específicos.} \quad (1)$$

Si $|p_e + p_{eo}| \ll p_{eo}$, $|\rho_e - \rho_{eo}| \ll \rho_{eo}$ y el flujo es laminar, se tiene que la vibración puede caracterizarse por cierta función potencial ϕ_e que satisface la ecuación de onda).

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial t^2} - c_e^2 \nabla^2 \phi_e = 0, \quad c_e^2 = (\gamma p_{eo} / \rho_{eo}) \quad (2a,b)$$

en donde la velocidad de movimiento de las partículas del gas y la presión en

cada punto están dados respectivamente por:

$$\bar{v}_e = -\nabla \phi_e \quad p_e - p_{eo} = \rho_{eo} \frac{\partial \phi_e}{\partial t} \quad (3a,b)$$

En el interior de la gota también podemos introducir una función potencial ϕ_i , que en el caso de movimiento laminar de un fluido incomprensible, satisface³:

$$\nabla^2 \phi_i = 0; \quad \bar{v}_i = -\nabla \phi_i, \quad p_i - p_{io} = \rho_{io} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \quad (4a,b,c)^*$$

Por la acción de la onda sonora³ la superficie de frontera se deforma, y en lugar de ser una esfera $r = a$, su ecuación estará dada por:

$$r - \zeta(\theta, \varphi) = a \quad (5)$$

en donde $\zeta(\theta, \varphi)$ es una cierta función θ, φ que caracteriza a la deformación, y tal que $|\zeta(\theta, \varphi)| \ll a$ para que se pueda utilizar la aproximación de vibraciones pequeñas.

Como $r = a + \zeta$, se tiene que la velocidad normal a la superficie está dada por $(\partial r / \partial t) = (\partial \zeta / \partial t)$ y por la relación entre velocidad y potencial, se tiene - que dentro de la aproximación lineal:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_a = - \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r} \right)_a \quad (6)$$

La ecuación (6) nos establece una de las condiciones a la frontera entre los dos medios.

La segunda condición a la frontera que necesitamos para completar el problema, proviene del hecho que la presión en el exterior más la fuerza normal por unidad de área de la tensión superficial, deben equilibrar en cada instante la presión interior. Si τ es el coeficiente de tensión superficial, la ecuación descrita en el párrafo anterior toma la forma:

$$\left[\tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + p_e - p_i \right]_{\text{superficie de frontera}} = 0 \quad , \quad (7)$$

donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura en cada punto.

De un análisis bien conocido de geometría diferencial⁴, se tiene que la suma de los recíprocos de los radios principales de curvatura está dada por la divergencia del vector unitario normal a la superficie, y como la ecuación de la superficie está dada por (5), se tiene que:

$$\tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \tau \left\{ \nabla \cdot \left[\frac{\nabla(r-\zeta)}{|\nabla(r-\zeta)|} \right] \right\}_{r=a} \quad , \quad (8)$$

$$\text{Pero: } |\nabla(r-\zeta)| = \sqrt{1 - \nabla r \cdot \nabla \zeta + (\nabla \zeta)^2} = \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} \quad , \quad (9)$$

ya que ∇r es un vector unitario en la dirección radial, y $\nabla \zeta$ es tangencial a la esfera. Se tiene entonces que, hasta primer orden en ζ :

$$\tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \tau [\nabla^2(r-\zeta)]_{r=\zeta=a} = \tau \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{r^2} L^2 \zeta \right]_{r=\zeta=a} \quad . \quad (10)$$

Finalmente, considerando términos hasta primer orden en ζ , se tiene:

$$\tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \tau \left[\frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} (L^2 - 2) \zeta \right] \quad , \quad (11)$$

donde L^2 es el operador de momento angular orbital:

$$L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad . \quad (12)$$

Introduciendo (3b), (4c) y (11) en (7), tenemos igualando separadamente las constantes y las partes dependientes del tiempo, que:

$$p_{e0} + \frac{2\tau}{a} = p_{i0} \quad , \quad (13)$$

$$\rho_{eo} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial t} \right)_{r=a} + \frac{\tau}{a^2} (L^2 - 2) \zeta = \rho_{io} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{r=a} \quad (14)$$

La ecuación (13) nos da la relación que debe existir para la posibilidad de equilibrio entre la gota de líquido y el gas, y la (14) nos da la condición a la frontera que nos hacía falta. El problema de dispersión de una onda sonora por una gota de líquido está entonces definido por la ecuación (2a) y (4a), y las condiciones a la frontera (6) y (14).

En el caso de la pompa de jabón, tenemos que el medio interior es un gas, de manera que ϕ_i satisface la ecuación de onda. La condición a la frontera (6) sigue en pie, y la (14) se modifica solo por el hecho de que hay que incluir en la condición de equilibrio la fuerza inercial por unidad de área de la pompa, que es $-\sigma(\partial^2 \zeta / \partial t^2)$, donde σ es la densidad por unidad de área de la pompa de jabón. De aquí se tiene que en este caso, las ecuaciones y condiciones a la frontera son:

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial t^2} - c_e^2 \nabla^2 \phi_e = 0, \quad c_e = (\gamma p_{eo} / \rho_{eo}), \quad r > a \quad (15a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} - c_i^2 \nabla^2 \phi_i = 0, \quad c_i = (\gamma p_{io} / \rho_{io}), \quad r < a \quad (15b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_a = - \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r} \right)_a \quad (15c)$$

$$\rho_{eo} \left(\frac{\partial \phi_e}{\partial t} \right)_{r=a} + \frac{\tau}{a^2} (L^2 - 2) \zeta + \sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \rho_{io} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{r=a} \quad (15d)$$

Hemos planteado el problema para la dispersión de ondas sonoras por gotas de líquido y por pompas de jabón, y en las siguientes secciones procederemos a resolverlos indicando, particularmente, aquellos aspectos del problema que son de especial interés en relación con los efectos colectivos en las reacciones nucleares.

II.- DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR UNA GOTA DE LIQUIDO.

Consideremos una onda sonora de frecuencia ω y número de onda $k = (\omega/c_e)$ en el medio exterior a la gota de líquido, y que incide sobre la gota. La función potencial no perturbada estaría dada por $\exp(ikz)$, y para el efecto de la perturbación conviene analizar separadamente los diferentes armónicos esféricos escribiendo:

$$\phi_{el} = \frac{1}{2} [h_l^-(kr) + S_l(k) h_l^+(kr)] Y_{l0}(\theta) e^{-i\omega t} \quad (16)$$

En el interior tenemos que $\nabla^2 \phi_i = 0$ de acuerdo con (4a), y para una frecuencia ω y un armónico esférico l , ϕ_i tiene la forma:

$$\phi_{il} = A r^l Y_{l0}(\theta) e^{-i\omega t} \quad (17)$$

De la condición a la frontera (6), vemos que:

$$-i\omega \zeta_l = - \left(\frac{\partial \phi_{el}}{\partial r} \right)_a = - \left(\frac{\partial \phi_{il}}{\partial r} \right)_a \quad (18)$$

y aprovechando el hecho de que $(\partial \phi_{il} / \partial r)_a = (l/a)(\phi_{il})_a$, se obtiene finalmente de (18) y (14) que:

$$(\phi_{el})_{r=a} = R_l(\omega^2) (\partial \phi_{el} / \partial r)_{r=a} \quad (19)$$

donde:

$$R_l(\omega^2) \equiv - \frac{1}{\rho_{eo} \omega^2} \left[\frac{\tau}{a^2} (l-1)(l+2) - \rho_{io} \frac{a}{l} \omega^2 \right] \quad (20)$$

De esta función $R_l(\omega^2)$ podemos, por el procedimiento ordinario, obtener $S_l(k)$ con $k = (\omega/c_e)$.

Es interesante investigar las características de la dispersión como función de la frecuencia a partir de la fórmula (20). Para muy bajas frecuencias $\omega \rightarrow 0$ y vemos de (19) y (20) que la función ϕ_{el} se caracterizaría por el hecho de que $(\partial \phi_{el} / \partial r)_a \rightarrow 0$, lo que significa que la velocidad normal del desplazamiento en la frontera tiende a 0, y la gota de líquido se comporta como una esfera rígida no dejando penetrar el desplazamiento, ya que:

$$\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial r} \right)_{r=a} = A l a^{l-1} Y_{l0}(\theta) e^{-i\omega t} \quad (21)$$

y por lo tanto $A \rightarrow 0$ si $(\partial \phi_{el} / \partial r)_a \rightarrow 0$. A medida que aumenta la frecuencia, la probabilidad de penetración del desplazamiento aumenta y alcanza su máximo a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_l^2 = \tau \frac{l(l-1)(l+2)}{\rho_{l0} a^3} \quad (22)$$

donde $(\phi_{el})_{r=a} = 0$, o sea que a la frecuencia de resonancia la presión es 0 sobre la superficie y el desplazamiento de la superficie es máximo. Cuando la frecuencia $\omega \rightarrow \infty$, se tiene que $R_l \rightarrow (a \rho_{l0} / l \rho_{e0})$, y en ese caso la condición a la frontera es independiente de la frecuencia para $\omega \gg \omega_e$, pero si depende de l .

Para $l=0$, $R_0(\omega^2) = \infty$ lo que significa que $(\partial \phi_{e0} / \partial r)_a = 0$ y la onda no puede penetrar en el interior a ninguna frecuencia, cosa que es de esperarse por el hecho de que el fluido es incomprensible, y por lo tanto no puede ser afectado por una onda de simetría esférica. Para $l=1$, $R_1 = (\rho_{l0} a / \rho_{e0})$ para todas las frecuencias, lo que es debido a que la dispersión está asociada con los movimientos de la gota como un todo, y no con las vibraciones de la gota.

Debido a que el comportamiento de la gota como un cuerpo rígido ocurre para $(\partial \phi_{el} / \partial r)_a = 0$ y no para el caso $(\phi_{el})_a = 0$, como sucede en la mecánica cuántica, resulta mas conveniente definir la admitancia de la vibración al interior de la gota como el recíproco de R_l , en cuyo caso:

$$-R_l^{-1}(\omega^2) = \frac{(l\rho_{eo}/a\rho_{io})\omega_l^2}{\omega_l^2 - \omega^2} - \frac{l\rho_{eo}}{a\rho_{io}}, \quad (23)$$

tiene la forma de una función de Wigner⁵ para una sola resonancia.

En el problema de la gota de líquido tenemos solo las resonancias correspondientes a las vibraciones naturales de la gota, y este modelo sería de aplicación restringida en el caso nuclear por no contener mas que una resonancia para cada momento angular l . Es por ello que en la sección siguiente analizamos la dispersión de ondas sonoras por pompas de jabón, en donde veremos que hay dos tipos de resonancia, las asociadas con las vibraciones naturales del aire en el interior de la pompa, y las asociadas con las vibraciones de la membrana que constituye la pompa.

III. DISPERSION DE ONDAS SONORAS POR POMPAS DE JABON.

El problema que tenemos ahora está caracterizado por las ecuaciones y condiciones a la frontera (15). Para una frecuencia ω y un momento angular l , tenemos que:

$$\phi_{el} = \frac{1}{2} [h_l^-(kr) + S_l(k) h_l^+(kr)] Y_{l0}(\theta) e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{\omega}{c_e}, \quad (24)$$

$$\phi_l = A j_l\left(\frac{\omega}{c_i} r\right) Y_{l0}(\theta) e^{-i\omega t}. \quad *$$

De (15c) tenemos que $-i\omega \zeta_l = -(\partial \phi_{el} / \partial r)_a$ y podemos poner las condiciones a la frontera en la forma:

$$\left(\frac{\partial \phi_l}{\partial r} \right)_a = \left(\frac{\partial \phi_{el}}{\partial r} \right)_a, \quad (26a)$$

$$\rho_{eo} (\phi_{el})_a + \left[\frac{\tau}{a^2} \frac{(l-1)(l+2)}{\omega^2} - \sigma \right] \left(\frac{\partial \phi_{el}}{\partial r} \right)_a = \rho_{io} (\phi_l)_a. \quad (26b)$$

* El símbolo j_l es la función de Bessel esférica j_l .

Definamos ahora $R_{iI}(\omega^2)$, $R_{sI}(\omega^2)$ como:

$$R_{iI}(\omega^2) = \frac{(\phi_{iI})_a}{\left(\frac{\partial \phi_{iI}}{\partial r}\right)_a} \quad R_{sI}(\omega^2) = \omega^{-2} [\sigma \omega^2 - \tau a^{-2}(l-1)(l+2)] \quad (27a,b)$$

De (26) vemos entonces que:

$$(\phi_{eI})_a = R_I(\omega^2) \left(\frac{\partial \phi_{eI}}{\partial r}\right)_a \quad (28a)$$

donde:

$$R_I(\omega^2) = \frac{\rho_{io}}{\rho_{eo}} R_{iI}(\omega^2) + \frac{1}{\rho_{eo}} R_{sI}(\omega^2) \quad (28b)$$

La función $R_I(\omega^2)$, que relaciona al potencial exterior ϕ_{eI} con su derivada sobre la superficie, puede descomponerse como la suma de dos partes:

Por un lado la $R_{iI}(\omega^2)$ dada por:

$$R_{iI}(\omega^2) = \frac{i_l\left(\frac{\omega}{c_i}\right)a}{\left[\frac{d}{dr} i_l\left(\frac{\omega}{c_i}\right)r\right]_a} \quad (29)$$

que representa la contribución a las vibraciones, del gas en el interior de la pompa, y por otro lado $R_{sI}(\omega^2)$ dado por (27b) que representa las vibraciones de la pompa misma, cuyas frecuencias naturales de vibración estarían dadas por:

$$\omega_l^2 = \frac{\tau}{\sigma a^2} (l-1)(l+2) \quad (30)$$

Si τ y σ fueran 0, la contribución de la pompa desaparecería y tendríamos el problema de dos gases en contacto a través de una esfera, en cuyo caso $R_I(\omega^2) = (\rho_{io}/\rho_{eo}) R_{iI}(\omega^2)$, y en particular, si las densidades son iguales

$R_l = R_{il}$, lo que equivaldría a la ausencia de dispersión. Si la densidad del gas interior es mucho menor que la del gas exterior ($\rho_{io}/\rho_{eo} \approx 0$) y en ese caso -- $R_l(\omega^2) \approx R_{sl}(\omega^2)$, o sea que la dispersión es provocada principalmente por el efecto de la membrana superficial.

A muy bajas frecuencias, esto es cuando:

$$\frac{\omega a}{c_i} \ll 1, \quad \omega \ll \omega_l, \quad (31)$$

el problema se reduce al caso de la gota de líquido, ya que:

$$i_l(\omega a/c_i) \sim (\omega a/c_i)^l \text{ y por lo tanto:}$$

$$R_{il} \approx \frac{a}{l}, \quad R_{sl} \approx -\frac{\tau}{a^2} (l-1)(l+2). \quad (32)$$

A muy altas frecuencias ($\omega a/c_i \gg 1$, $\omega \gg \omega_l$ (donde ω_l dado por (30), y se tiene que:

$$R_l(\omega^2) \approx \frac{a\rho_{io}}{\rho_{eo}} \frac{\cot\left(\frac{\omega a}{c_i} - \frac{l+1}{2}\right) \pi}{(\omega a/c_i)} + \frac{\sigma}{\rho_{eo}}. \quad (33)$$

Para analizar las resonancias que se presentan en el problema de dispersión de ondas sonoras por pompas de jabón, recordamos que de (24), la función potencial⁸ a grandes distancias de la pompa es:

$$\phi_e \approx e^{i(kz - \omega t)} - \left\{ \sum_l \frac{\sqrt{\pi(2l+1)}}{ik} [1 - S_l(k)] Y_{l0}(\theta) \right\} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad (34)$$

donde de (28a) y (24) se tiene:

$$S_l(k) = -\frac{h_l^-(ka) - k R_l(k^2) h_l^{-\prime}(ka)}{h_l^+(ka) - k R_l(k^2) h_l^{+\prime}(ka)}. \quad (35)$$

En (35), $h_l^\pm(ka)$ son las funciones esféricas de Hankel y $h_l^{\pm\prime}(ka)$ sus derivadas respecto al argumento.

En caso de que el gas dentro de la pompa se comportara como una esfera rígida, se tendría que la amplitud de dispersión sería $-[h_l^+(ka)/h_l^+(ka)]$. Es conveniente expresar $1-S_l(k)$ en forma que se vea explícitamente la contribución de la esfera rígida, y la contribución del efecto de resonancia, para lo cual restamos y sumamos la expresión indicada en la frase anterior a $1-S_l(k)$, y obtenemos:

$$1-S_l(k) = e^{i2\eta_l} \left[(e^{-i2\eta_l} - 1) + \frac{2is_l}{R_l(k^2) - (\delta_l + is_l)} \right], \quad (36)$$

donde^a:

$$e^{i2\eta_l} = \frac{h_l^-(ka)}{h_l^+(ka)}, \quad \delta_l + is_l = \left[\frac{h_l^+(ka)}{k h_l^+(ka)} \right] \quad (37)$$

En el supuesto de que la densidad del gas en el interior de la pompa es mucho mayor que en el exterior, y que las presiones son comparables, se tiene $c_i \ll c_l$, y por lo tanto el número de onda interior $\frac{\omega}{c_i}$ es bastante mayor que k , lo que nos permite suponer que $R_l(k^2)$, varía mucho más rápidamente con k que δ_l y s_l . De aquí, - por los argumentos bien conocidos^a, podemos concluir que las resonancias corresponden a los valores de k tales que $R_l(k^2)=0$, ya que estos darán el valor máximo al segundo término dentro del paréntesis cuadrado de (36) que corresponde a la amplitud de resonancia. De (28b) tenemos que $R_l(\omega^2)=0$ nos da:

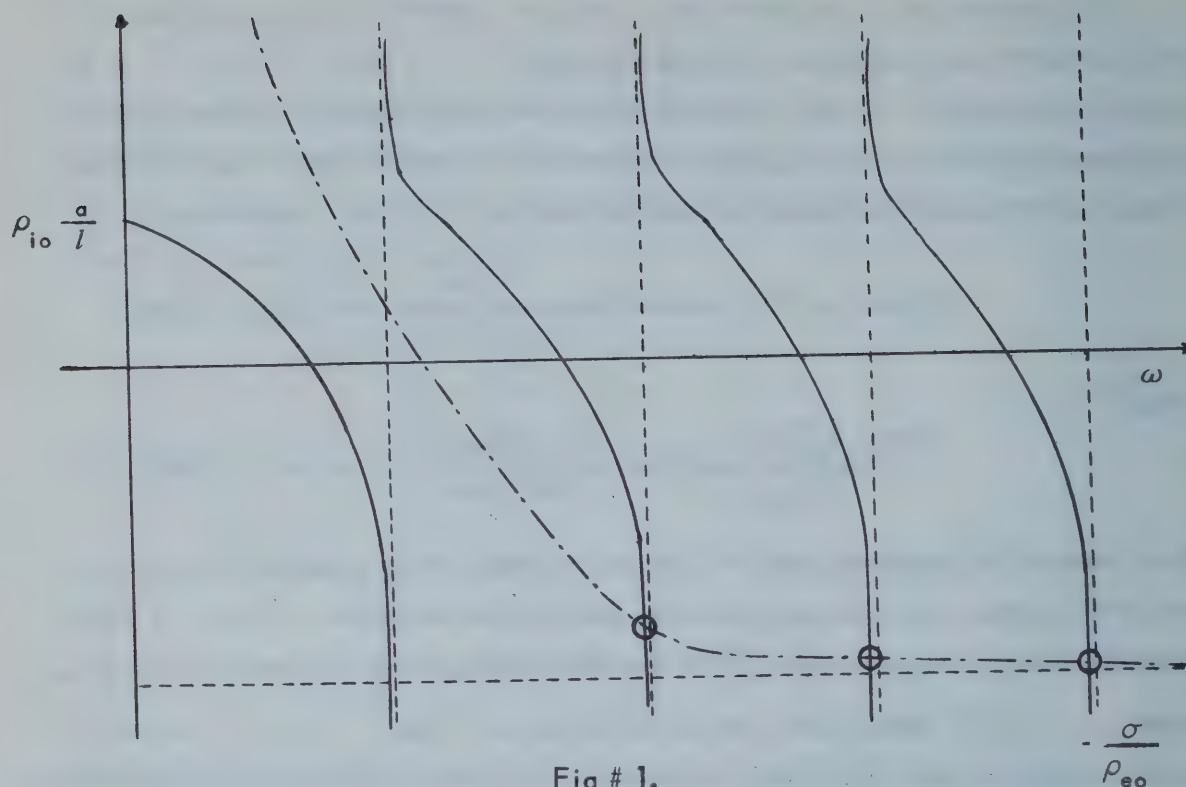
$$\rho_{i0} R_{il}(\omega^2) = -R_{sl}(\omega^2) \quad (38)$$

Las curvas $-R_{sl}(\omega^2)$, $\rho_{i0} R_{il}(\omega^2)$ están trazadas como función de ω en la figura # 1, y los puntos de corte corresponden a lo que podríamos interpretar como resonancias en este problema.

A altas frecuencias las resonancias estarían dadas por la ecuación:

$$\cot\left(\frac{\omega a}{c_i} - \frac{l+1}{2}\pi\right) = -\frac{\sigma}{a\rho_{i0}}\left(\frac{\omega a}{c_i}\right). \quad (39)$$

En el problema de la pompa de jabón vemos entonces que las frecuencias de resonancias no corresponderían a las de vibraciones libres de una esfera de gas caracterizada



por $i_l \left(\frac{\omega a}{c_i} \right) = 0$, o lo que es lo mismo por $R_{il}(\omega^2) = 0$, sino que estarían desplazadas con respecto a estas frecuencias naturales por la acción de las vibraciones de la pompa, tal como se ilustra en la Fig. # 1.

En la vecindad de las resonancias se puede desarrollar

$$R_l(\omega^2) = \left[\frac{dR_l}{d\omega^2} \right]_{\omega_r^2} (\omega^2 - \omega_r^2), \quad R_l(\omega_r^2) = 0, \quad (40)$$

y viendo la expresión (36) se sugiere definir una anchura reducida para la resonancia dada por :

$$\gamma = a \left(\frac{dR_l}{d\omega^2} \right)^{-1}_{\omega_r^2} = \left[\frac{\rho_{i0}}{\rho_{e0}} a^{-1} \frac{dR_{il}}{d\omega^2} + \frac{\tau (l-1)(l+2)}{\rho_{e0} a^3 \omega^4} \right]^{-1}_{\omega_r^2} \quad (41)$$

De (29) se tiene que:

$$a^{-1} R_{il} = i_l \left(\frac{\omega a}{c_i} \right) \left[\frac{\omega a}{c_i} i_l' \left(\frac{\omega a}{c_i} \right) \right]^{-1} \quad (42)$$

y por las características de las funciones de Bessel, esta es una función meromorfa de ω^2 . Utilizando la ecuación que satisface $j_l(z)$ se demuestra fácilmente que

$$a^{-1} \frac{dR_{il}}{d\omega^2} = \frac{1}{2\omega^2} \left[1 + \frac{R_{il}}{a} + \left\{ \left(\frac{\omega a}{c_i} \right)^2 - l(l+1) \right\} \left(\frac{R_{il}}{a} \right)^2 \right]. \quad (43)$$

En ausencia de los efectos de superficie $R_l = \left(\frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}} \right) R_{il}$, y por lo tanto las resonancias estarían dadas por $R_{il}(\omega_r^2) = 0$, lo que implicaría que las anchuras reducidas serían $\gamma \doteq 2\omega_r^2 \frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}}$. Si la interacción superficial se hace sentir, ω_r estará dada por la ecuación (38) y de (41) y (27b) se tiene que: *

$$\gamma = \frac{2\omega_r^2 (\rho_{eo}/\rho_{io})}{\left[1 + \frac{2\sigma}{a\rho_{io}} - \frac{3R_{sl}}{a\rho_{io}} + \left\{ \left(\frac{\omega a}{c_i} \right)^2 - l(l+1) \right\} \left(\frac{R_{sl}}{a\rho_{io}} \right)^2 \right]} \omega^2 = \omega_r^2 \quad (44)$$

La expresión en el numerador es la anchura reducida en ausencia de acoplamiento sobre la superficie. El denominador nos da entonces la modulación que impone el acoplamiento de la superficie sobre la anchura reducida.

Es de interés ver el efecto de esta modulación cuando la frecuencia de resonancia $\omega_r \simeq \omega_l$ y $\omega_r \gg \omega_l$, donde ω_l es la frecuencia natural de vibración de la pompa dada por (30). Como de (27b) y (30) $R_{sl}(\omega^2)$ está dado por:

$$R_{sl}(\omega^2) = \sigma \left(1 - \frac{\omega_l^2}{\omega^2} \right) \quad (45)$$

tenemos que si $\omega_r \simeq \omega_l$, $R_{sl} \simeq 0$ y la anchura reducida toma la forma:

$$\gamma \simeq 2\omega_r^2 \frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}} \left(1 + \frac{2\sigma}{a\rho_{io}} \right)^{-1} \quad (46)$$

Si $\omega_r \gg \omega_l$ $R_{sl} \simeq \sigma$ y la anchura reducida toma la forma:

$$\gamma \simeq 2 \frac{\rho_{eo}}{\rho_{io}} \left(\frac{c_i}{a} \right)^2 \left(\frac{\rho_{io} a}{\sigma} \right)^2 \quad (47)$$

que es independiente de ω_r .

Vemos entonces que aún a frecuencias muy lejanas de la frecuencia natural de la pompa, el efecto de la presencia de esta se hace sentir sobre las anchuras reducidas de las resonancias, ya que, en lugar de que estas anchuras aumenten linealmente con ω_r^2 , permanecen constantes. También vemos de (33) que la posición de las resonancias se ve modificada por el efecto de superficie y de hecho, si $\omega_r \rightarrow \infty$, la presencia de la pompa hace que las ω_r estén defasadas por $\frac{\pi}{2}$ con respecto a las resonancias en ausencia de la pompa.

Estos efectos sobre las resonancias y sus anchuras que tiene la interacción superficial, son de un alto interés en la aplicación de las ideas desarrolladas en este trabajo a los fenómenos colectivos en los nucleos.

REFERENCIAS

1. Aage Bohr. Dan.Mat.Fys. Medd. 26, No. 14, (1952).
2. Philip M. Morse. Vibration and Sound. (Mc Graw Hill 1948) Second Edition Cap. VI.
3. H. Lamb, Hydrodynamics (Dover Publications 1945) P. 473-475.
4. C.E. Weatherburn. Differential Geometry (Cambridge University Press 1931) P. 69.
5. E.P. Wigner. Ann. of Math. 53, 36, (1951).
6. J.M. Blatt y V.F. Weisskopf. Theoretical Nuclear Physics. (John Wiley and Sons, 1952) P. 320.

DETERMINACIONES DE SECCIONES TOTALES CON NEUTRONES DE ENERGÍAS
COMPRENDIDAS ENTRE 13.0 Y 16.2 MEV. *

Marcos Mazāri, Fernando Alba y Vinicio Serment

INTRODUCCION

Con el objeto de ampliar la información existente¹ se efectuaron en el Laboratorio de Física Nuclear de la U. N. A. M. , determinaciones de secciones totales σ_t , en varias sustancias, empleando neutrones rápidos monoenergéticos con energías comprendidas entre 13.0 y 16.2 Mev. Esta técnica fué empleada con anterioridad por el Dr. T. W. Bonner en el mismo Laboratorio. Las sustancias ensayadas hasta el presente han sido; Al, Fe, Ni, Cu, Zn, Ag, Sn, Hg, Pb, Bi.

Se espera que esta información sea útil para verificar la teoría del " Modelo de Reacciones Nucleares con Neutrones " , debida a Feshbach, Porter y Weisskopf² , en la región de energías mayores a las calculadas hasta la fecha.

Se incluyen datos de Ag y Pb publicados anteriormente¹ , por contar con nuevas determinaciones de estas sustancias en la misma región. Los nuevos resultados confirman a los anteriores, además de haberse utilizado los primeros como guía en el presente estudio.

* Trabajo presentado en la Asamblea Conjunta de la Sociedad Mexicana de Física y de la American Physical Society.

EQUIPO 1

Se empleó una Máquina Van de Graaff de 2 Mev. y como proyectiles se usaron deuterones. Por medio de un campo magnético, se seleccionaron las energías de bombardeo de los deuterones, dirigiendo el haz de partículas contra un blanco de Tritio en Circonio (Zr T) para producir la reacción siguiente:



Cambiando las energías de los deuterones y el ángulo del equipo con respecto al blanco (ver Fig. 1), se logró un flujo de neutrones monoenergéticos cuyas energías era posible variar entre 13.0 y 16.2 Mev.

Los pulsos debidos al flujo de neutrones se produjeron en un plástico de polietileno, frente a un fotomultiplicador Dumont (6292); las señales luminosas fueron registradas y amplificadas electrónicamente con un equipo Atomic, previa selección de la altura y anchura de las mismas, por medio de un analizador de señales y un contador capaz de discriminar pulsos distantes en tiempo de 1 microsegundo.

Se observó una producción intensa de rayos γ al tratar de incrementar la energía de los neutrones de 16.2 a 18.2 Mev. Desgraciadamente no se contaba con un cristal sensible únicamente a los neutrones de esta energía, ni tampoco se pudieron separar las señales debidas a los n y a la radiación γ elevando el voltaje de los pulsos en el discriminador, ya que ambos efectos, los debidos a n y a γ , se eliminaban simultáneamente de esta manera.

ENSAYOS

La geometría que se consideró más adecuada para estas pruebas fué seleccionada cualitativamente a partir de los resultados experimentales que se muestran en la Fig. 2. Se empleó en toda la serie de ensayos a que se refiere el presente trabajo, una distancia del blanco al detector de 40 cm, colocando las muestras al centro.

A partir de las mediciones de la transmisión $T = \frac{I}{I_0}$ siendo I = flujo de neutrones con la muestra en medio y I_0 = flujo de neutrones sin la muestra

se calcularon las secciones totales de los distintos materiales empleando la conocida fórmula:

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\sigma_t n L}$$

en la que n representa el número de núcleos por cm^3 y L la longitud de la muestra ensayada.

Las observaciones directas fueron corregidas en la siguiente forma:

- a) **Por geometría.** Se calcularon los factores de corrección de las secciones en función de la energía de los neutrones, utilizando la fórmula sugerida por Day y Henkel³. Estas correcciones fueron del orden de 4% para Al y de 12% para Bi, y para la misma sustancia, entre los 13 y 16 Mev, sólo variaban en un 2%.
- b) **Por un factor constante.** Se multiplicaron los valores σ_t de tal manera que se hiciera coincidir el promedio de las determinaciones presentes con los valores absolutos de las mismas sustancias a 14.12 Mev, obtenidos por Coon, Graves y Barschall.

Se hicieron además los cálculos de las desviaciones normal de cada grupo de determinaciones con la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$$

RESULTADOS

Se presentan dos series de gráficas. En la Fig. 3, aparecen los resultados de los ensayos afectados únicamente por la corrección de Day y Henkel. En la Figura mencionada se muestran las determinaciones de Coon, Graves y Barschall, en las que emplearon neutrones con una energía de 14.12 Mev. En las Figs. 4 y 5 se presentan los datos experimentales corregidos por un factor constante, a continuación de la información ya publicada de las sustancias ensayadas¹.

Los resultados de estas gráficas son los siguientes: en Al, la sección total se incrementó al aumentar la energía, aparentemente aproximándose a un má

ximo, mientras que en Fe, Cu, Zn, la sección total decrece paulatinamente; Ag presenta una sección total máxima de 4.38 barns alrededor de los 12.5 Mev y Sn una σ_t de 4.70 barns por los 14.0 Mev; en Hg, Pb, Bi, las secciones máximas totales de 5.50, 5.58 y 5.75 barns, se presentan alrededor de los 15.7, 15.4 y 15.9 Mev, respectivamente.

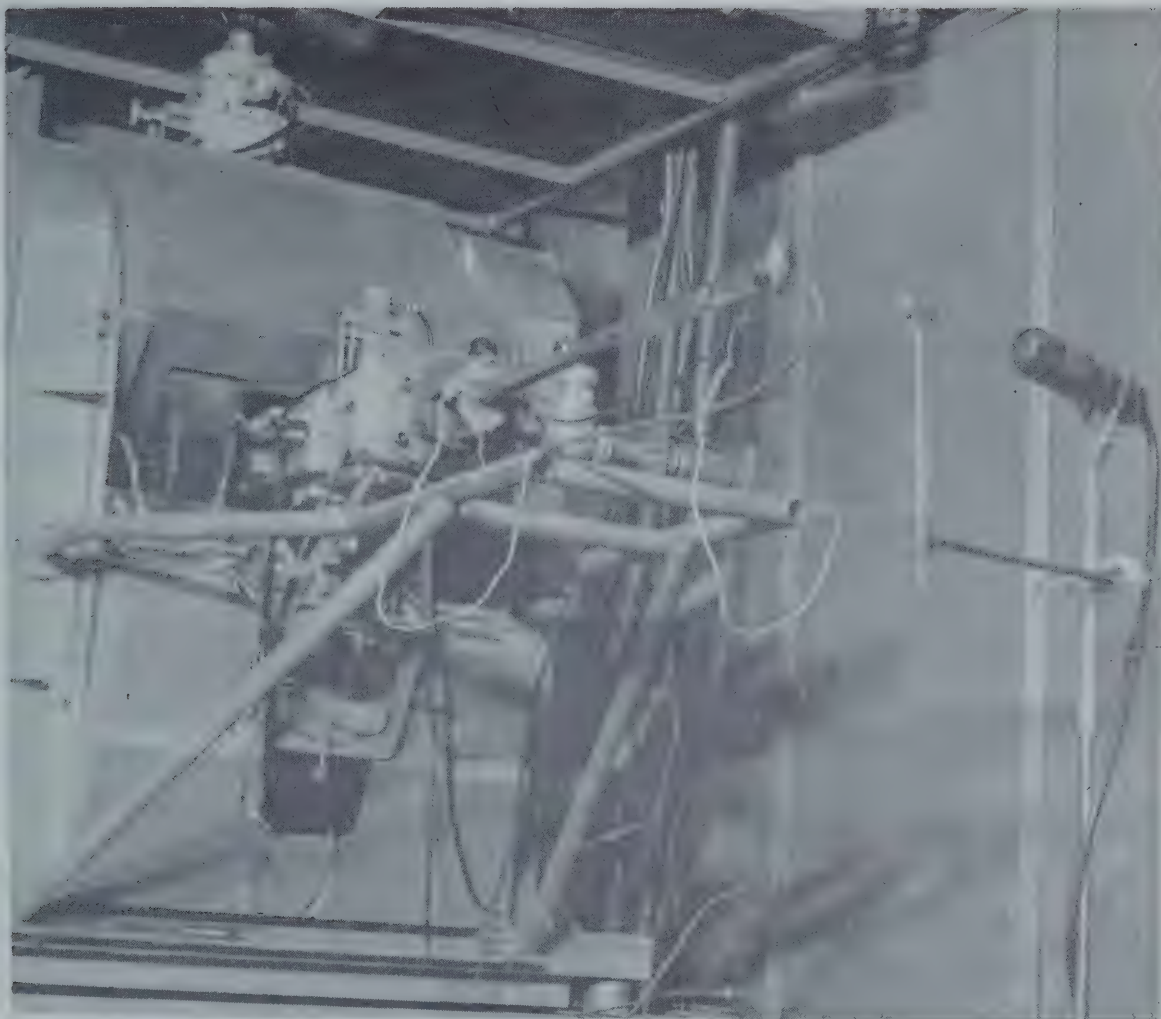
En la tabla I, se muestra un resumen de las características geométricas de las muestras empleadas, así como el número de determinaciones en cada ensayo

Con objeto de comparar los valores de las determinaciones de secciones totales σ_t obtenidas en el estudio con los valores teóricos de las mismas calculados con la conocida fórmula de Feshbach ($\sigma_t = 2\pi(r_0 A^{1/3} + \lambda)^2$) se han dibujado en la Fig. 6 la $\sigma_t^{1/2}$ vs $A^{1/3}$ de las sustancias ensayadas con neutrones de 13.0 y 16.2 Mev. Puede observarse que salvo para Ag y Sn, la concordancia de los valores obtenidos con las demás sustancias es mejor si en la fórmula de Feshbach se usa un valor para r_0 de 1.38×10^{-13} cm.

Agradecemos la ayuda prestada por los señores Luis y Juan Velásquez en este estudio, tanto por su constancia y preocupación en el manejo y cuidado del equipo como por su laboriosidad en la revisión de los cálculos.

REFERENCIAS.

1. Miller, Adair, Bockelman y Darden. Phys. Rev. 88, 83, (1952).
Nereson y Darden. Phys. Rev. 89, 775 (1953); 94, 1678 (1954).
Coon, Graves y Barschall. Phys. Rev. 88, 562 (1952).
Day y Henkel. Phys. Rev. 92, 358 (1953).
Bonner, Alba, Fernández y Mazari. 97, 985 (1954) y Rev. Mex. Fís. Vol.4 No.2
Serment. Tesis. U.N.A.M. 1955.
2. Feshbach, Porter y Weisskopf. Phys. Rev. 90, 166 (1953); 96, 448 (1954).
3. Day y Henkel, Phys. Rev. 92, 358 (1953).



DISPOSITIVO EXPERIMENTAL EMPLEADO EN EL PRESENTE ESTUDIO

- a. Magneto deflector de la Máquina de Van de Graaff
- b. Blanco de tritio
- c. Muestra
- d. Fotomultiplicador

Fig. 1

SELECCION DE LA GEOMETRIA ADECUADA

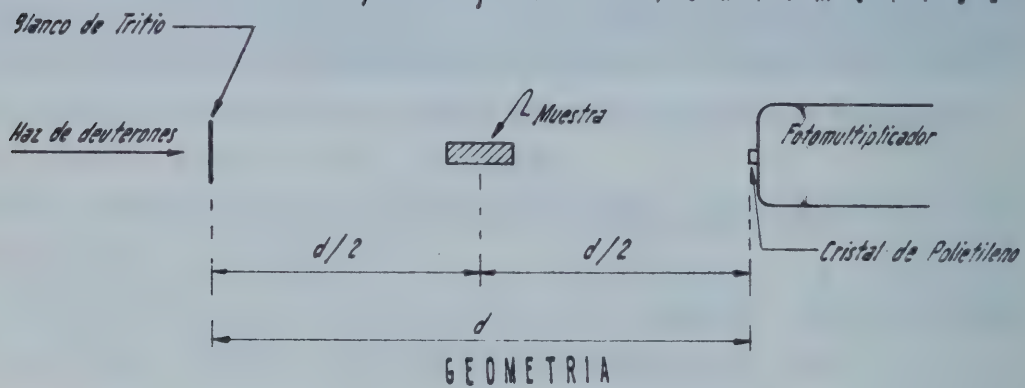
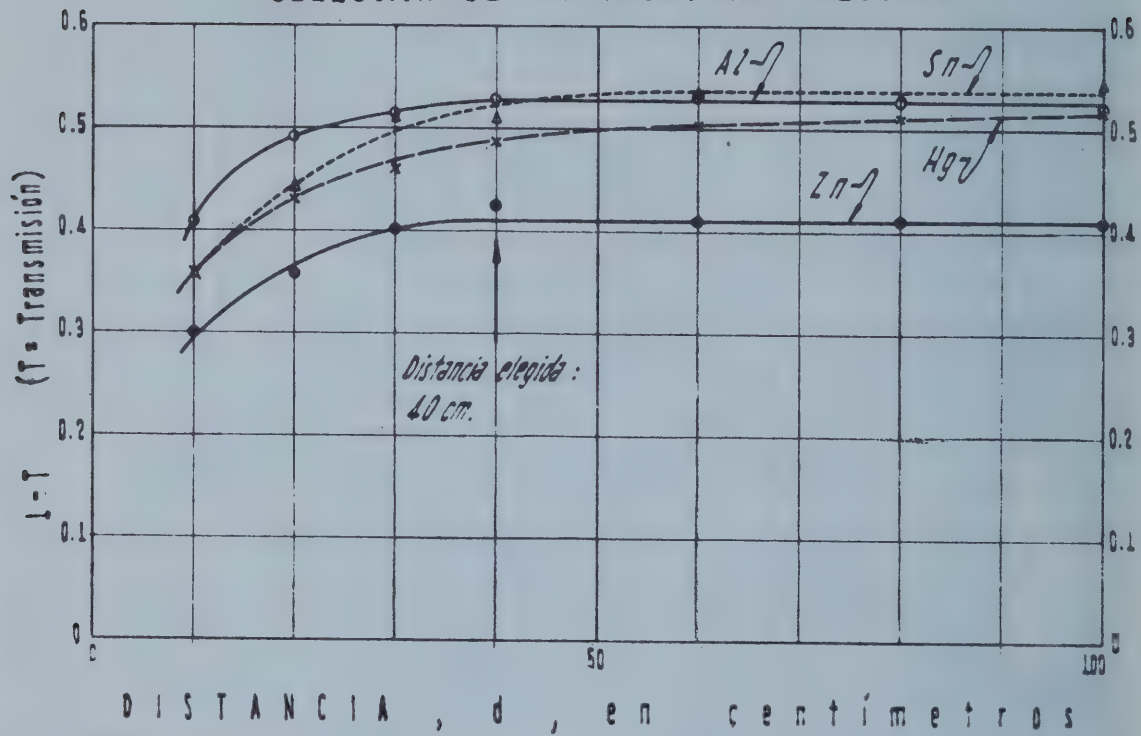
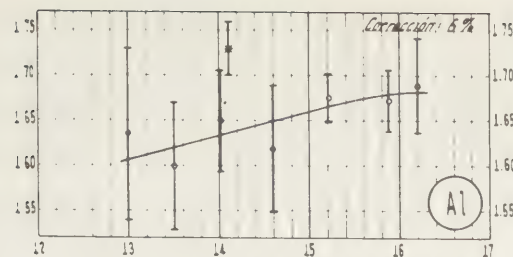
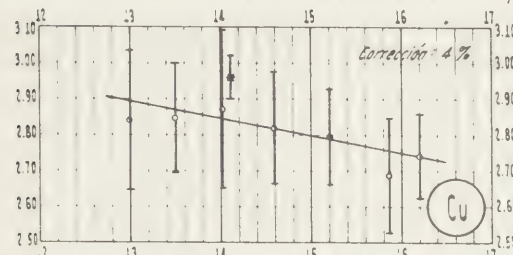


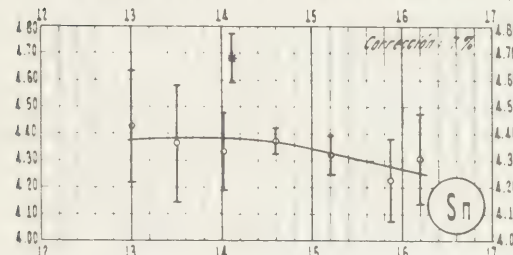
Fig. 2



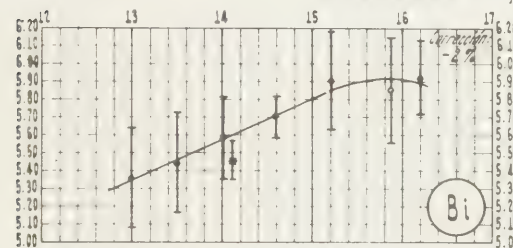
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



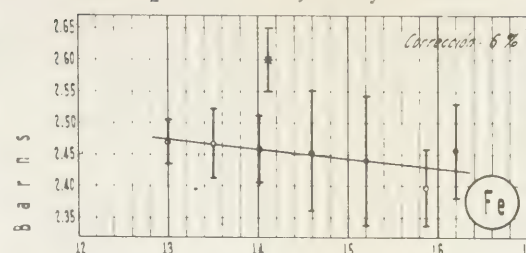
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



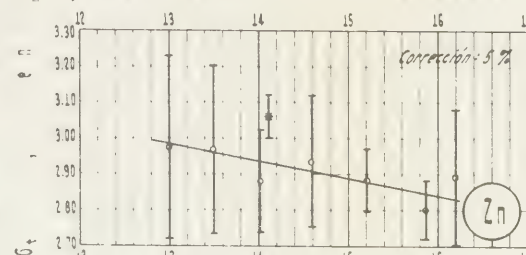
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



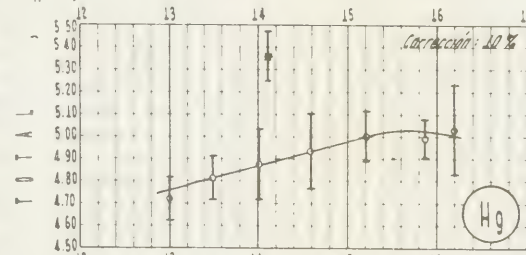
NOTA: $\bullet$ Valores de Coon, Graves y Barschall



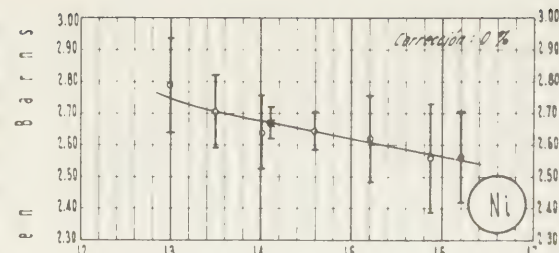
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



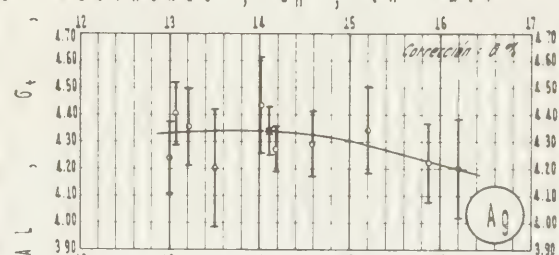
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



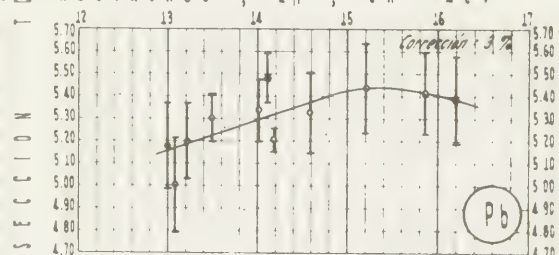
ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV



ENERGIA DE NEUTRONES, E_n , en MeV

Fórmula empleada para calcular las secciones:

$$I = I_0 e^{-\sigma n L} \quad ; \quad \frac{I}{I_0} = T \text{ (Transmisión)}$$

$$\text{Desviación estándar, } s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$$

Fig. 3

Fórmula de Day y Henkel:

$$\frac{\Delta G_t}{G_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{L} \right)^2 (kR+1)^2$$

G_t = Sección total

D = Diámetro de la muestra

L = Longitud de la muestra

k = Número de onda

$R = 1.4 \times 10^{-13} A^{1/3}$

A = Número de masa

VARIACION DE LA SECCION TOTAL,
CON LA ENERGIA DE NEUTRONES,
ENTRE 13.0 Y 16.2 MEV

Fig. 3

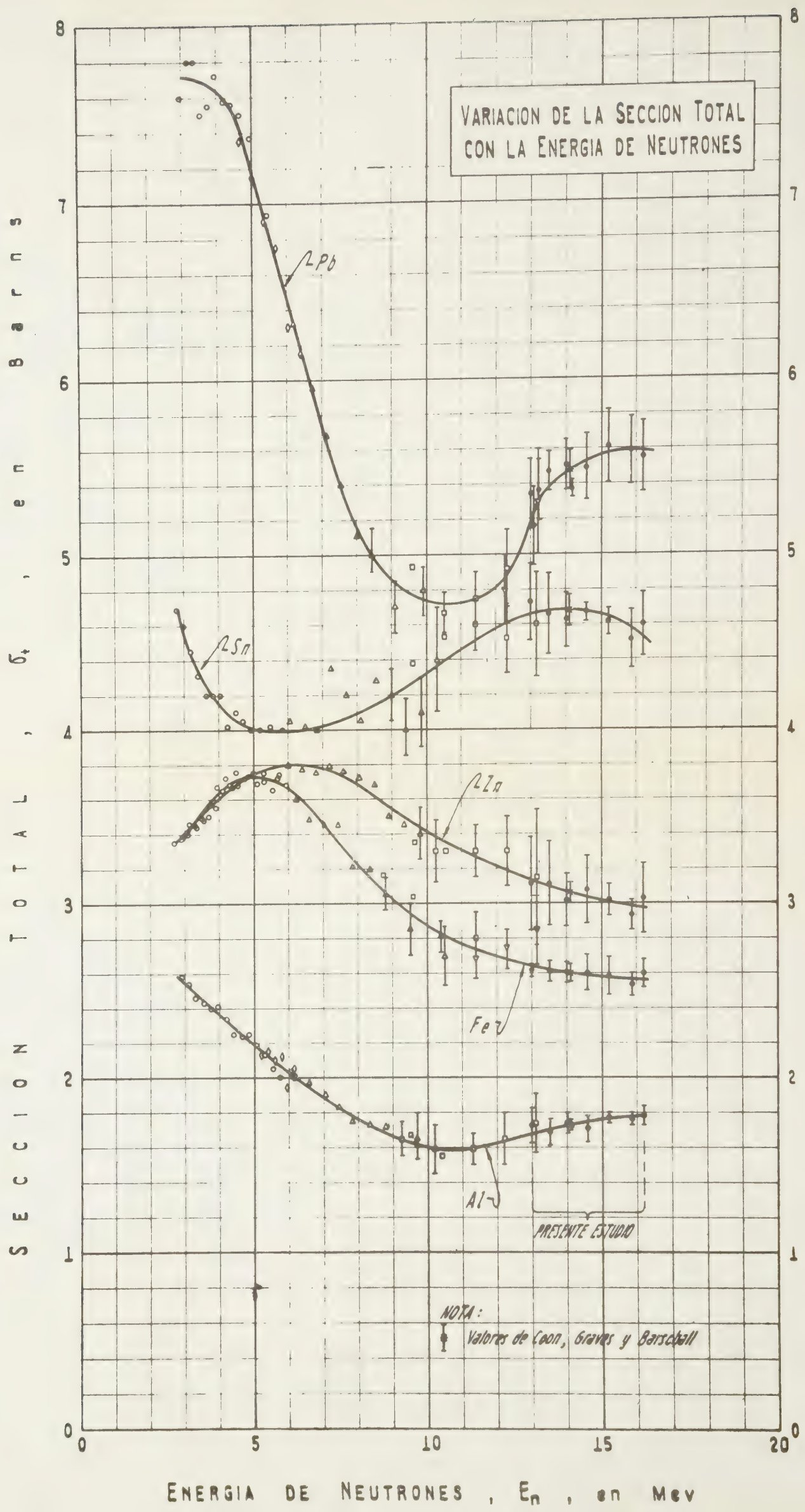


Fig. 4
76

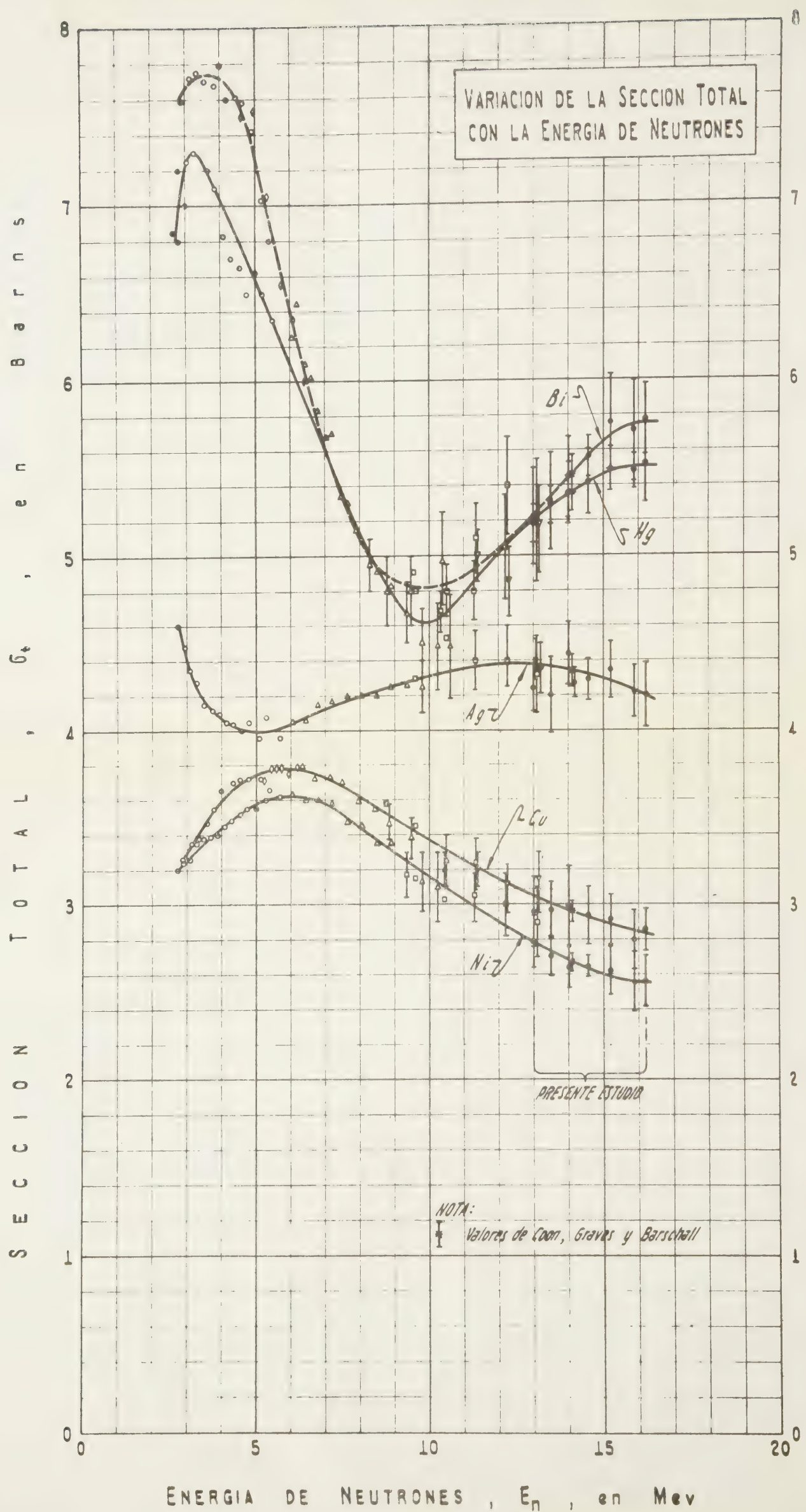


Fig. 5
77

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS

	Al	Fe	Ni	Cu	Zn	Ag	Sn	Hg	Pb	Bi
DIAMETRO , en cm.	2.54	2.50	2.51	2.52	2.52	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
LONGITUD , en cm.	7.69	3.82	2.02	2.26	3.03	3.08	5.90	3.70	4.49	3.20
NUMERO DE NU- CLEOS/cm ³ x 10 ²⁴	0.060	0.085	0.081	0.084	0.065	0.058	0.051	0.041	0.033	0.028
NUMERO DE NU- CLEOS/cm ³ x 10 ²⁴	0.456	0.324	0.164	0.189	0.198	0.173	0.186	0.151	0.148	0.902

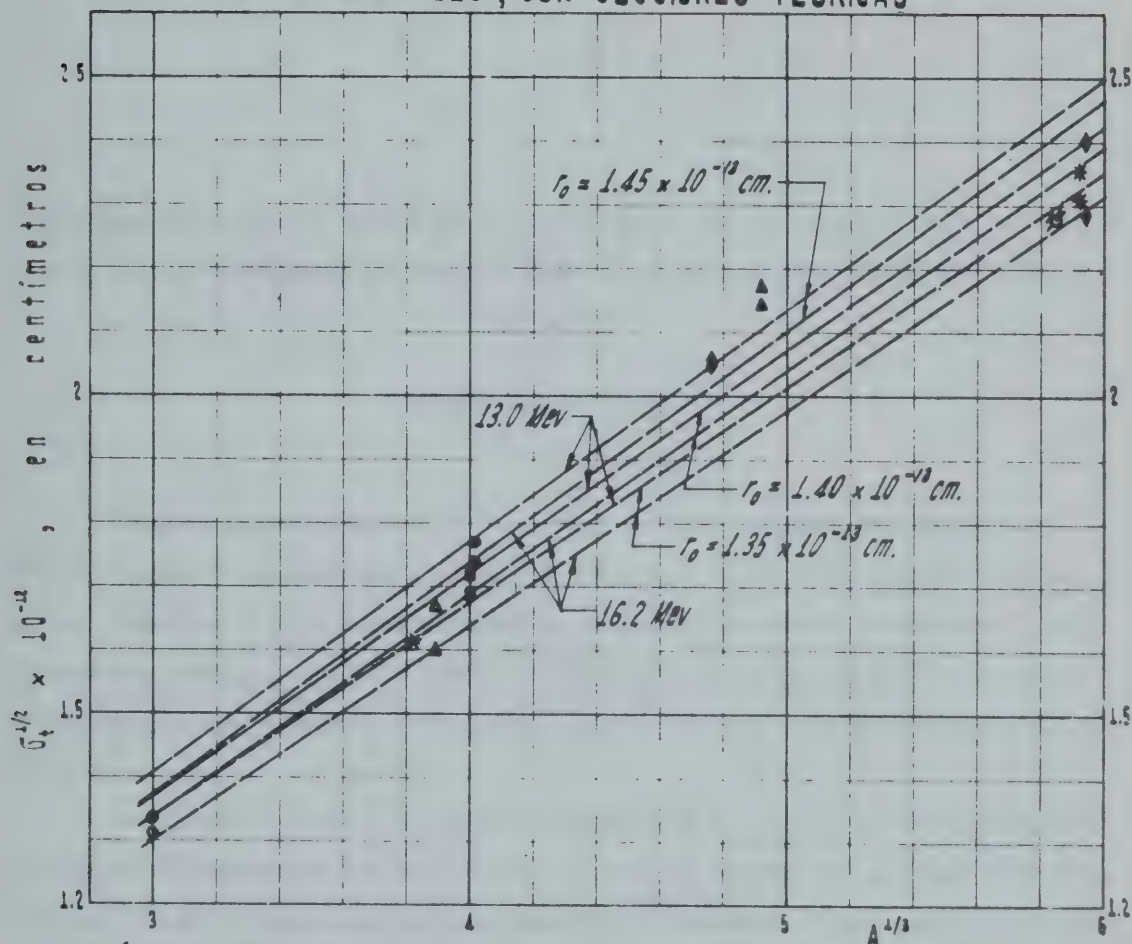
NUMERO DE DETERMINACIONES

ENERGIA DE NEUTRONES, en Mev	Al	Fe	Ni	Cu	Zn	Ag	Sn	Hg	Pb	Bi
13.00	28	15	21	27	12	10	37	15	11	19
13.08	—	—	—	—	—	5	—	—	8	—
13.22	—	—	—	—	—	9	—	—	9	—
13.50	43	18	15	34	14	38	12	17	14	14
14.02	15	38	12	14	21	12	12	15	13	15
14.18	—	—	—	—	—	11	—	—	11	—
14.59	15	15	12	12	10	12	12	19	15	17
15.21	12	16	16	16	14	13	14	16	13	20
15.87	13	17	23	23	18	22	17	18	22	19
16.20	26	22	13	13	21	23	22	17	20	18

NOTA: Se efectuaron las cuentas para cada 100 μ c en el blanco.

Tabla 1

COMPARACION DE SECCIONES TOTALES EXPERIMENTALES, CON SECCIONES TEORICAS



Fórmula de Feshbach :

$$\sigma_t^{1/2} = \sqrt{2\pi} (r_0 A^{1/3} + \lambda)$$

σ_t = Sección total

r_0 = Parámetro

A = Número de masa

λ = Longitud de onda asociada

SIGNOS CONVENCIONALES :

Al ----- o	Ag ----- o
Fe ----- x	Sn ----- ▲
Ni ----- ▲	Hg ----- ◊
Cu ----- □	Pb ----- *
Zn ----- ●	Bi ----- ◆

Fig. 6

DETERMINACION DE LA EDAD DE LA MUESTRA: SP. 2 TAMAULIPAS MEXICO
S. M. CANYON INFIERNILLO TM. C. 248, Tm. 248 LEVEL 7 CULTURE EARLY
PORTALES

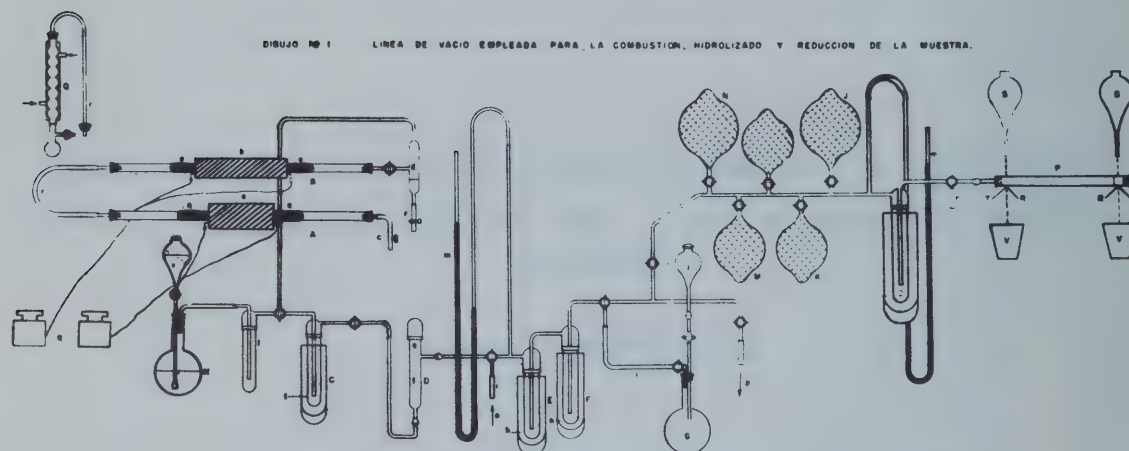
Augusto Moreno Moreno

Usando el procedimiento del Dr. W. F. Libby para la determinación de la edad de muestras conteniendo carbono, se determinó la cantidad de carbono radioactivo específico y de ese dato la edad de una de las muestras intituladas como Tamaulipas México S. M. CANYON INFIERNILLO, enviadas por el Dr. Mc. Neish del museo de Ottawa Canada, a la Universidad de Chicago para su determinación arqueológica.

Se procedió primero al examen cuidadoso de la muestra y se separaron las partes indeseables tales como arena, y residuos obviamente no orgánicos. Después de lavado con agua destilada se procedió a comprobar la presencia de carbonos, removidos estos se lavó y secó a 90°C . por seis horas.

La combustión de la muestra fué llevada a cabo en una línea de vacío (Fig. 1). La combustión se verificó en un tubo Vycor, y se introdujo oxígeno a una presión ligeramente menor de una atmósfera, los gases de combustión son llevados a un tubo Vycor posteriormente situado, conteniendo óxido de cobre, para completar

la oxidación a dióxido de carbono; siguiendo el orden en el diagrama: entrada de oxígeno-bombeo, los gases son después conducidos a una trampa con hielo seco y un tubo con Drierita, posteriormente el CO_2 procedente de la combustión es condensado en las trampas siguientes mediante aire líquido. La presión inicial de bombeo es sobre 10 cm. de Hg.



Usando la misma línea de vacío se procedió a la expansión del CO_2 a una atmósfera de presión, sobre una solución 6 NORMAL de amoníaco, se convirtió después a carbonato de calcio mediante una solución concentrada e hirviente de cloruro de calcio, este carbonato de calcio se lavó y suspendió en agua destilada para el segundo paso de purificación usando parte del mismo sistema de vacío.

No utilizando más los tubos de combustión y de óxido de cobre la suspensión de carbonato de calcio se trató con ácido clorhídrico y el CO_2 se lavó, secó y condensó en las trampas mencionadas en el paso anterior usando para el proceso de condensación aire líquido. Habiendo verificado el vacío en los bulbos colectores, se expande CO_2 a una atmósfera de presión hacia dichos bulbos, y el paso de

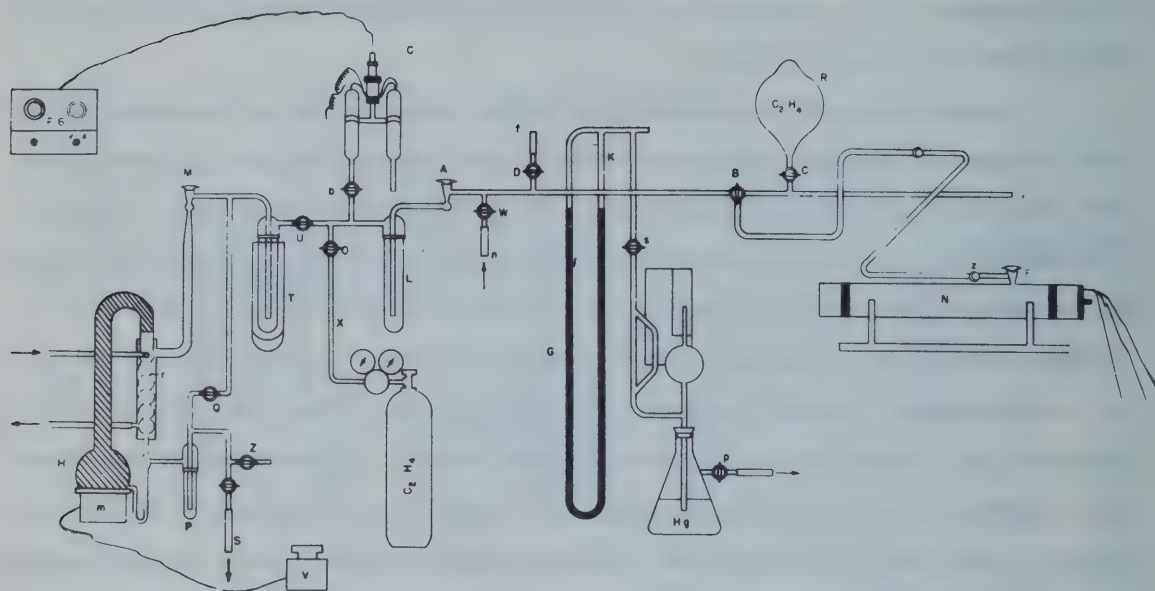
la reducción del CO_2 es verificada por conversión de este a carbono metaloide en un tubo de acero conteniendo sobre 85 grm. de magnesio y en el que se habia hecho el vacío, el tubo metálico mencionado está conectado a los frascos colectores y a un manometro diferencial de mercurio en paralelo a esta parte de la linea, la reducción fué empezada calentando con un soplete de gas-oxigeno el tubo metálico, a una temperatura un poco inferior a 600°C (660°C temperatura de fusión del magnesio) e introduciendo CO_2 a presión de 0.5 a 0.8 de atmósfera, la reacción sienao exotérmica tomó lugar por si misma.

Los productos de la reacción resultantes, entre los que se encuentran el carbono son tratados mediante solución concentrada de acido clohidrico hirviente, y lavado repetidas veces con agua destilada. Después de secado y pesado el carbono se suspendió en una solución de agar al 0.15% para su montaje en la pared del tubo de muestra que más tarde se introdujo en el contador de doble pared de Libby¹. El contador fué lavado con solución nitrica y agua destilada, y reinstalado con un nuevo alambre central y pared de rejá para asegurarse de que al aplicar los potenciales electricos apropiados estos permanecerían constantes. Sellando el contador con cera de Khotinsky, se bombeó por 48 horas para asegurarse de la ausencia de productos nitrosos. Más tarde el contador de Libby fué cargado con el tubo de muestra que contiene el carbono radioactivo, y sellado nuevamente con cera de Khotinsky y posteriormente bombeado en la linea de vacío de la figura 2, en la que una bomba de difusión de mercurio está en serie con la mecánica, y en la que dos trampas enfriadas con aire liquido son usadas para condensar el agua proveniente de la solución de agar, el bombeo se siguió por 24 horas hasta conseguir una presión de 4-6 micrones. Se llenó el contador a una presión de 2 cm^3 de gas argón y 1.3 cm^3 de gas etileno previamente destilado al vacío y contenido en R de la linea de la figura 2.

Para poder determinar radiación tan suave como lo es la del radio carbono fué necesario usar una coraza protectora para eliminar radiación de fondo, de 8 pulgadas de espesor, que protegía tambien el sistema de contadores de anticoincidencia contador de muestra.

Se usaron contadores de anticoincidencia tipo Geiger de 18 pulgadas de longitud por 2 de diametro, conectados en paralelo y en contacto tangencial entre si.

DIBUJO Nº 2 LÍNEA DE VACÍO DESTINADA AL LLENADO Y EVACUADO DE CONTADORES



Un potencial de 1350 volts fue aplicado al alambre del contador central y 1100 volts a los contadores de anticoincidencia. La construcción del equipo de conteo es tal que aseguró la máxima relación de conteo entre la cifra de la muestra y la radiación de fondo. Libby escogió el contador Geiger como el instrumento apropiado por su habilidad para detectar electrones de energía termal con aproximadamente 100% de eficiencia.

El contador de Libby mencionado es un Geiger con doble pared, una de las cuales es sosten de la muestra y la otra es la pared de rejá, en la que un potencial apropiado se aplica con objeto de acelerar las Betas que, producidas en la muestra pudieran no ser registradas en el alambre central, por trayectoria indebida. Este potencial fué del orden de 90 volts positivo con respecto a la pared del contador ,

de esta forma, este opera sin cambio apreciable al obtener cifras para la posición de muestra y la de radiación de fondo.

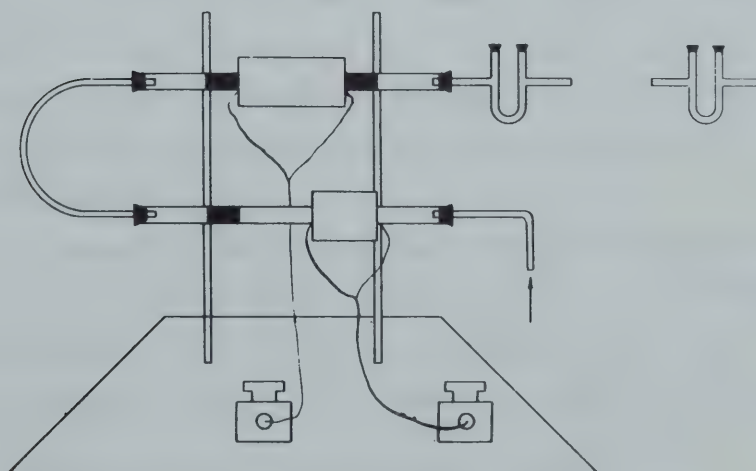
La sensibilidad, geometría etc, etc, del contador no fué establecida, por tener información de ese equipo obtenida con anterioridad.

La observación durante el conteo en el oscilógrafo, aseguró la ausencia de pulsos múltiples, que es indeseable primero por que podría ser causada por composición impropia de los gases ó contaminación por entrada de aire al contador por sellado defectuoso, y segundo, por el circuito y los contadores de anticoincidencia usados para cancelar cuentas mesónicas, es inhábil para cuentas de pulsos múltiples, puesto que aunque las primeras componentes de los pulsos múltiples se cancela, los pulsos precedentes no lo serían por razones obvias. Fueron contadas alternativamente las dos posiciones de tubo de la muestra, esto es, la actividad de la muestra, y la actividad de la radiación de fondo cósmica, en intervalos de tiempo previamente calculados de acuerdo con las primeras observaciones.

El error estadístico de las cuentas se tomo como la raíz cuadrada del número total de cuentas dividido entre el tiempo en que se conto.

Se usaron 9.2 gr. de carbon esparcidos sobre 400 cm^2 de area del tubo en que se coloca la muestra, esto da un espesor que esta cerca del espesor infinito para el alcance de la radiación del carbono 14, y de esta forma se evitaron correcciones por aspereza de la muestra en el extendido.

DIBUJO QUE MUESTRA LA LINEA USADA PARA DETERMINACION DE CENIZAS DE LA MUESTRA



La determinación de las cenizas se verificó en la línea que se ilustra en el dibujo, en la que dos tubos Vycor son usados, uno en el que se deposita una cantidad de carbono previamente pesado y en el que se realiza la combustión, y el otro con óxido de cobre calentado a 500°C , y en el que la reducción se lleva hasta CO_2 que es colectado en un tubo en U previamente pesado y conteniendo ascarite, y en el que CO_2 absorbido se encuentra por diferencia.

La determinación de porcentaje de pureza siempre arroja un faltante de aproximadamente 5% que es considerado como agua absorbida por la muestra.

Se contó durante 16 horas, después de las cuales se calculó la actividad y edad de la muestra, resolviendo la ecuación diferencial de decaimiento radioactivo aplicada al caso específico del carbono 14, y previas correcciones por cenizas y conteo de anticoincidencia se determinó la edad de la muestra arriba mencionada en: 3945 ± 334 años (tres mil novecientos cuarenta y cinco años más o menos trescientos treinta y cuatro años).

El análisis mencionado en este trabajo, fue realizado en el Instituto de Estudios Nucleares de la Universidad de Chicago, por lo que doy las gracias a esta Universidad, asimismo al Dr. W. F. Libby y al Dr. Martell por su ayuda al permitirme usar el equipo e instrumentos que me suministraron.

NOTAS SOBRE UN REACTOR DE URANIO NATURAL, D_2O , CO_2 .

Leopoldo Nieto Casas.

INTRODUCCION

Se presentan algunas consideraciones y cálculos elementales sobre el anteproyecto de un reactor de uranio natural, con moderador de D_2O y enfriado con CO_2 . Se ha elegido como protipo el reactor de Saclay cuya potencia es de 1000 kw.

GENERALIDADES

El agua pesada es prácticamente un moderador ideal¹. El poder moderador del agua pesada es inferior únicamente al del agua ligera. La combinación de un poder moderador y de una baja sección de absorción de neutrones térmicos, le da al agua pesada una razón de moderación (poder moderador entre sección de absorción) mayor que para cualquier otro material.

El agua pesada es el único moderador que puede considerarse seriamente para el buen rendimiento de un reactor de potencia que use uranio natural. Si se tiene cuidado durante el diseño, de evitar el uso excesivo de materiales estructurales que absorban neutrones en la parte activa del reactor, éste se podrá operar con una

razón de conversión próxima a la unidad. Esta alta razón de conversión asegura el mantenimiento de la reactividad para el alto porcentaje "quemado" que es necesario por razones económicas.

El poder moderador intermedio y su baja sección de absorción del D_2O permite diseños de reactores en los cuales la razón entre los volúmenes del D_2O y del uranio es muy alto. Valores comunes de esta razón para núcleos de reactores con D_2O y H_2O , están de 20 y 2, respectivamente. El pequeño volumen del uranio permite que el diseño del núcleo, el manejo del combustible y el control del reactor con D_2O sea mucho más fácil que cuando se trata de un reactor con H_2O . La pequeña cantidad de uranio y la baja sección de absorción del moderador, explican que la vida de los neutrones inmediatos sea diez veces mayor en un reactor con D_2O , que un uno con H_2O . Esto es un factor muy importante desde el punto de vista de la seguridad, ya que pueden despreciarse pequeñas "excursiones" del período en los reactores con D_2O . Ya que en una parte importante del capital que se invierte en una planta nuclear, generalmente se destina a instalaciones de seguridad, es de esperarse que la seguridad relativa de un reactor con D_2O tenga una repercusión favorable en el costo de electricidad.

La cotización presente para el D_2O en las grandes plantas norteamericanas es de \$28/lb. El costo del uranio natural metálico es de aproximadamente \$18/lb. y el precio del uranio enriquecido con 90% de U^{235} está entre 15 y 30 \$/gramo.

El calor que se desprende de una pila se extrae haciendo circular un fluido que, sea por elevación de temperatura, sea por cambio de estado, absorbe la energía a medida que se forma. El calor aparece principalmente en el uranio; pero también aparece en el moderador, el reflector y la protección biológica². Se pueden utilizar fluidos distintos para evacuar el calor producido en estos diferentes elementos. Pero el problema principal se refiere al uranio; el fluido que extrae el calor producido en el uranio, es el fluido primario.

Las desventajas de usar gas comprimido como fluido primario son evidentes: el gas tiene baja capacidad térmica, baja conductividad térmica y viscosidad elevada. Pero tiene también sus ventajas: facilidad de manejo, corrosión mínima y

débil absorción de neutrones.

DESCRIPCION

La cuba que contiene el agua pesada, tiene la forma de un cilindro de 2 m de diámetro y de 2.50 m de altura. El espesor del cuerpo es de 3 mm y el del fondo plano, de 6 mm. Su capacidad neta, sin incluir los órganos sumergidos en el agua es de 7 m^3 , pero el volumen crítico es sensiblemente inferior a este valor.

La masa de uranio contenida en la pila es de 3 toneladas. Las barras activas son 136 y están dispuestas según una malla con paso de 15 cm. La alimentación de las células de gas frío y la evacuación del gas caliente se hacen por la parte superior. La circulación es, por lo tanto, del tipo de "horquilla".

Una célula se representa esquemáticamente de la manera siguiente: La parte axial está ocupada por la barra de uranio, rodeada por un tubo pantalla de magnesio. Este conjunto está alojado en otro tubo de aluminio que se sumerge directamente en el agua pesada. El gas frío desciende entre los tubos de aluminio y magnesio y en seguida sube a lo largo de la barra de uranio. Durante su curso descendente, enfría el moderador en el cual se desarrolla cinco por ciento de la potencia total y durante su curso ascendente enfría la barra de uranio.

La transmisión del calor entre las corrientes ascendente y descendente se atenúa por la existencia de una capa gaseosa de 1 mm que se mantiene prisionera entre los dos tubos que constituyen la pantalla de magnesio. Esta lámina gaseosa es un buen aislante; en efecto, durante su curso descendente, el gas no se calienta más de 3°C .

Cada célula recibe un flujo de gas proporcional a la potencia que desarrolla, de manera que las temperaturas de salida son idénticas para todas las células.

El reflector lateral es de grafito con espesor mínimo de 90 cm la pantalla térmica está constituida por placas de hierro fundido de 20 cm, de espesor. La pantalla biológica está constituida por una pared de 2.25 m de concreto de 2.35 tons/m^3 .

Temperaturas:

Potencia térmica	800 kw
Presión absoluta	8.0 at

Gasto de CO_2	66 tons/hr
Temperatura de entrada	24° C
Temperatura de salida	85° C
Temperatura máxima de los cartuchos	126° C
Temperatura del agua pesada	30° C

CALCULOS

Coeficiente de utilización térmica³. Sea ρ la densidad en gr/cm³ de una sustancia, M su peso molecular, N_a el número de Avogadro, entonces N, el número de moléculas por las cm³ es:

$$N = \frac{\rho N_a}{M}$$

Si la sección microscópica para la absorción de neutrones térmicos es σ_a , la sección microscópica correspondiente será Σ_a .

$$\Sigma_a = N \sigma_a$$

Para el deuterio se tiene⁴ $\sigma_a = 0.46 \times 10^{-3}$ barn, $\rho = 1.1$ gr/cm³ M = 20 y con $N_a = 6.02 \times 10^{23}$ grm.mole⁻¹, se obtiene $(\Sigma_a)_{\text{D}_2\text{O}} = 3.04 \times 10^{-5}$ cm⁻¹. Si el deuterio contiene una impureza de 0.23% de H₂O, se ha determinado experimentalmente $(\Sigma_a)_{\text{D}_2\text{O}} = 8.0 \times 10^{-5}$ y L_1 = longitud de difusión térmica = 100 cm $\therefore K_1 =$

$$\therefore K_1 = \frac{1}{L_1} = 0.01 \text{ cm}^{-1}$$

Para el uranio natural se tiene $\Sigma_a = 0.351$ cm⁻¹, $\Sigma_s = 0.388$ cm⁻¹, y con estos valores se determina K_0 , la recíproca de la longitud de difusión por medio de la expresión:

$$\frac{K}{\Sigma} = \tanh \frac{K}{\Sigma_s}$$

$$\therefore K_0 = 0.70 \text{ cm}^{-1}$$

Si la malla exagonal, según la cual están dispuestos los elementos combustibles

tiene 10 cm de lado su superficie será de 259 cm^2 y un círculo que tuviera la misma área tendría un radio $r_1 = 9.05 \text{ cm}$ supondremos que la barra de uranio tiene un radio $r_o = 1.25 \text{ cm}$.

$$K_o r_o = 0.70 \times 1.25 = 0.875$$

$$K_1 r_1 = 0.01 \times 9.05 = 0.0905$$

$$\frac{r_1}{r_o} = 7.24 ; \left(\frac{r_1}{r_o} \right)^2 = 52.3$$

Si $\phi(r_o)$ es el flujo en la cara interior del moderador para $r = r_o$ y $\bar{\phi}_o$ es el flujo promedio dentro del uranio.

$$\frac{\phi(r_o)}{\bar{\phi}_o} = 1 + \frac{(K_o r_o)^2}{8} - \frac{(K_o r_o)^4}{192} = 1.0926$$

Sea $\delta =$ exceso de absorción .

$$\delta = \frac{(K_1 r_1)^2}{2} \left(\text{Log}_e \frac{r_1}{r_o} - \frac{3}{4} \right) = 0.00489$$

La razón entre los volúmenes $\frac{V_1}{V_o} = \left(\frac{r_1}{r_o} \right)^2 - 1 = 51.3$

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_o} = \frac{8.0 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}}{0.351} = 2.28 \times 10^{-4}$$

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{V_1}{V_o} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_o} \frac{\phi(r_o)}{\bar{\phi}_o} + \delta$$

$$\frac{1}{f} = 1.0177 ; f = f_r = 0.985$$

Que se ha designado como f_1 .

Absorción en los ductos y en el refrigerante. Se supondrá que el tubo exterior de aluminio tiene 2.70 cm de radio y un espesor de 0.159 cm que es suficiente para

soportar una presión interna de 10 atmósferas. La pantalla de magnesio vendría a tener un radio de 2.10 cm y un espesor total de 0.0794 cm. Supondremos que el uranio está recubierto con una capa de magnesio de 0.0397 cm de espesor. El área de la sección recta del aluminio y del magnesio será de 2.70 cm² y 1.357 cm², respectivamente. Para el aluminio $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$ $\sigma_a = 0.230$ barn y para el magnesio $\rho = 1.74 \text{ g/cm}^3$, $\sigma = 0.063$.

$$\text{Se obtiene } \Sigma_{\text{Al}} = 0.0129 \frac{1}{\text{cm}}, \quad \Sigma_{\text{Mg}} = 0.00275 \frac{1}{\text{cm}}.$$

$$\frac{V_{\text{Al}}}{V_o} = \frac{2.70}{4.91} = 0.55; \quad \frac{V_{\text{Mg}}}{V_o} = 0.276.$$

$$\left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{Al}} = \frac{V_{\text{Al}}}{V_o} \cdot \frac{\Sigma_{\text{Al}}}{\Sigma_o} \cdot \frac{\phi(r_o)}{\phi_o} = 0.0222$$

$$\left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{Mg}} = 0.00237$$

Para el CO₂ se tienen los siguientes datos, en condiciones normales $\rho = 1.98 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $M = 44$, $\sigma_a = 0.0036$ de manera que para una presión de 8 atmósferas y una temperatura de 55° C, $\rho = 13.2 \text{ g/cm}^3$.

Se obtiene $\Sigma_{\text{CO}_2} = 0.00065$. El área de la sección recta ocupada por el CO₂ es de 14 cm². Se obtiene)

$$\left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{CO}_2} = 0.00576$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{Al}} + \left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{Mg}} + \left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{\text{CO}_2}; \quad f_2 = 0.955$$

Absorción por encadenamiento de X_e :

$$\left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{X_e} = \frac{0.0312}{1 + \frac{6.0 \times 10^{12}}{\phi}}$$

suponiendo $\phi = 6.0 \times 10^{12}$; $\left(\Delta \frac{1}{f}\right)_{X_e} = 0.0156$.

$$\frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_2} + \left(\Delta \frac{1}{f} \right)_{Xe}, \quad f_3 = 0.940$$

Probabilidad de escape de la captura por resonancia.

Constantes para el cálculo; moderador: $\Sigma''_M = 0.0315 \text{ cm}^{-1}$
 $K_1 = 0.159$; uranio : $\Sigma''_U = 0.0941 \text{ cm}^{-1}$; $K_0 = 0.411$.

$$\frac{\phi(r_0)}{\phi_0} = 1 + \frac{(K_0 r_0)^2}{8} - \frac{(K_0 r_0)^4}{192} = 1.0294$$

$$\delta = \frac{(K_1 r_1)^2}{2} \left(\log_e \frac{r_1}{r_0} - 0.75 \right) = 1.280$$

$$\left(\frac{1}{f_r} - 1 \right) = \frac{V_1}{V_0} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} \frac{\phi(r_0)}{\phi_0} = 17.6$$

Con ayuda de la expresión $p = e^{-\left(\frac{1}{f_r} - 1\right)^{-1}}$ se calcula $p = 0.945$.

De las tablas ϵ = factor de fusión rápida = 1.0275 , η = número promedio de neutrones por absorción = 1.32 .

$$k_\infty = \epsilon p f \eta = 1.200 \text{ .}$$

Cuando se usa D_2O como moderador, es posible despreciar el efecto de temperatura.

Dimensiones del reactor. Sean L'_M = longitud de difusión térmica en el moderador = 100 cm , L = id en el reactor , entonces :

$$L^2 = L_M^2 (1 - f_1) \frac{f_3}{f_1} \frac{V_R}{V_M} = 144 \text{ cm}^2$$

Si K es el factor de forma y τ es la edad en el moderador $\alpha = 120 \text{ cm}^2$,

$$k_{ef} = 1 = \frac{k_\infty e^{-K^2 \tau}}{1 + K^2 L^2}$$

De donde se calcula K^2 por tanteos. $K^2 = 6.95 \times 10^{-4}$.

Para un recipiente cilíndrico donde el radio sea R y la altura H , es conveniente que $H = 1.8475 R$ y para esta relación se tiene:

$$K^2 = \left(\frac{2.9453}{R} \right)^2$$

y en nuestro caso, $R = 1.14 \text{ m}$, $H = 2.10 \text{ m}$.

Volumen del reactor: $\pi R^2 H = 8.6 \text{ m}^3$.

Cantidad de agua pesada:

$$8.6 \frac{V_M}{V_R} = \frac{8.6}{1.02} = 8.4 \text{ m}^3, \text{ o sea } 9.25 \text{ T.}$$

Uranio:

$$\frac{V_R}{\left(\frac{r_1}{r_0} \right)^2} = 0.165 \text{ m}^3, \text{ o sea, } 3.10 \text{ T.}$$

Número de barras. Se obtiene dividiendo el área total del reactor entre el área de una celda. En nuestro caso el número de canales es de 158.

REFERENCIAS

1. H.P. Ishenderian, L.E. Link, M. Treshow y J.M. West de A. N. L. Heavy Water Reactor For Industrial Power, Including Boiling Reactor, International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. P/495.
2. J. Yvon, La Pile de Saclay, id, P/387.
3. R.L. Murray, Nuclear Engineering, Prentice Hall, 1954.
4. D.J. Hughes y J.A. Harvey, Neutron Cross Sections, USAEC, 1955

EL CAMPO DE LA ECUACION DE BHABHA *

Fernando E. Prieto C.

El propósito de este trabajo es presentar algunas propiedades del campo de la ecuación de Bhabha¹ para una partícula con dos estados diferentes de masa y spin, uno con masa κ/λ y spin $\frac{1}{2}$, y otro con masa κ y spin $\frac{3}{2}$, propiedades que son muy útiles en el tratamiento de problemas por las técnicas usuales de la teoría del campo.

La ecuación de Bhabha puede derivarse por un principio variacional a partir de la densidad Lagrangiana:

$$L = \bar{\psi} (\alpha^\mu p_\mu + \kappa) \psi \quad (1)$$

en la que el operador adjunto $\bar{\psi}$ y el operador diferencial p_μ están definidos por:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger D \quad p_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2)$$

* Este trabajo fué presentado en la asamblea Conjunta de la Sociedad Mexicana de Física y de la American Physical Society, México D. F., Agosto 1955. F. E. Prieto, Bull. Am. Phys. Soc. 30, No. 5, 28 (1955).

y D es una matriz 20×20 Hermitiana y no singular, tal que las cuatro matrices $D \alpha^\mu$ son también Hermitianas. Las ecuaciones de movimiento para las variables del campo ψ y $\bar{\psi}$ están dadas entonces por:

$$(\alpha^\mu p_\mu + \kappa) \psi = 0 \quad (\tilde{\alpha}^\mu p_\mu - \kappa) \bar{\psi} = 0 \quad (3)$$

y suponiendo para la interacción entre el campo de Bhabha y un campo electromagnético, una densidad Lagrangiana del tipo:

$$L_{be} = i^\lambda A_\lambda \equiv e \bar{\psi} \alpha^\lambda \psi A_\lambda \quad (4)$$

las ecuaciones de movimiento toman forma

$$[\alpha^\mu (p_\mu + e A_\mu) + \kappa] \psi = 0 \quad (5)$$

$$[\tilde{\alpha}^\mu (p_\mu - e A_\mu) - \kappa] \bar{\psi} = 0 \quad (6)$$

Sea ahora C una matriz unitaria antisimétrica que satisface las propiedades:

$$\tilde{C} = -C, \quad C^\dagger C = C C^\dagger = 1, \quad C \tilde{\alpha}^\mu = -\alpha^\mu C \quad (7)$$

Definimos entonces el espinor conjugado de carga ψ' y su correspondiente operador adjunto $\bar{\psi}'$ por las ecuaciones:

$$\psi' = C \bar{\psi} = -\bar{\psi} C, \quad \bar{\psi}' = \psi'^\dagger D = C^{-1} \psi \quad (8)$$

se puede demostrar entonces que estos operadores conjugados satisfacen, en presencia de un campo electromagnético, ecuaciones de movimiento similares a las de $\bar{\psi}$ y ψ , pero con el signo de la carga cambiado.

Simetrizando las expresiones para el campo con respecto a la conjugación de carga, la densidad Lagrangiana $L(x)$, (la corriente $j^\lambda(x)$, el tensor momento-energía $T^\lambda_\mu(x)$ y el cuadrivector momento P_μ , están dados respectivamente por las ecuaciones:

$$L(x) = \frac{1}{2} [\bar{\psi} (\alpha^\mu p_\mu + \kappa) \psi + \psi (\tilde{\alpha}^\mu p_\mu - \kappa) \bar{\psi}] \quad (9)$$

$$j^\lambda(x) = \frac{e}{2} [\bar{\psi} \alpha^\lambda \psi - \psi \tilde{\alpha}^\lambda \bar{\psi}] \quad (10)$$

$$T_\mu^\lambda(x) = -\frac{i}{2} [\bar{\psi} \alpha^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \psi \tilde{\alpha}^\lambda \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu}] \quad (11)$$

$$P_\mu[\sigma] = -\frac{i}{2} \int_\sigma [\bar{\psi} \alpha^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \tilde{\alpha}^\lambda \bar{\psi}] d\sigma_\lambda \quad (12)$$

Udgaonkar² ha demostrado que las variables del campo de la ecuación de Bhabha satisfacen las reglas de conmutación:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}^\beta(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x - x') \quad (13)$$

en la que la función $S(x)$ esta definida por :

$$S(\pm x) = \sum_{i=1}^2 \frac{(-)^{i+1}}{\kappa^4 (1 - \lambda^2)} K^2 (K \mp \kappa) (K^2 - \beta_i^2) D_i(x) \quad (14)$$

con el operador matricial K y las constantes β_1 y β_2 dados por:

$$K = \alpha^\mu p_\mu = -i \alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \quad \beta_1^2 = \kappa^2 \lambda^2; \quad \beta_2^2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2} \quad (15)$$

y en la que las funciones D_1 y D_2 definidas por:

$$D_1(x) \equiv D_\kappa(x) \quad D_2(x) \equiv D_{\kappa/\lambda}(x) \quad (16)$$

son respectivamente las funciones invariantes usuales D para masas κ y κ/λ

No es difícil demostrar que $S(x)$ satisface la propiedad:

$$S(x) \dagger D = -D S(-x) \quad (17)$$

la cual permite expresar las variables del campo como integrales de la forma:

$$\psi(x) = -i \int_{\sigma} S(x-x') \alpha^{\lambda} \psi(x') d\sigma'_{\lambda} \quad (18)$$

en la que la integral se extiende a una superficie espacialoide que pasa por x . Para $\bar{\psi}(x)$ se obtiene una expresión enteramente análoga.

Estas integrales, junto con las reglas de conmutación, y la expresión para el cuadrivector momento, pueden usarse para obtener el conmutador de las variables del campo con el cuadrivector momento, conmutador que está dado por:

$$[\psi_{\alpha}(x), P_{\mu}[\sigma]] = \frac{1}{i} \frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}} \quad (19)$$

resultado que puede usarse a su vez para demostrar que si el estado de vacío del campo se define como el estado de menor energía, puede también definirse en términos de las componentes de frecuencia positiva de las variables del campo mediante las ecuaciones:

$$\psi^{(+)}(x) \phi_v = 0, \quad \bar{\psi}^{(+)}(x) \phi_v = 0 \quad (20)$$

Este último resultado permite demostrar que los valores esperados para el vacío de los conmutadores de las variables del campo están dados por:

$$[\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}^{\beta}(x')]_v = -S_{\alpha\beta}^1(x-x') \quad (21)$$

en la que la función $S^1(x)$ está definida por la misma ecuación que define $S(x)$ pero usando la función invariante $D^1(x)$ en vez de $D(x)$. Puede también demostrarse que:

$$[P^*(\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}^{\beta}(x'))] = \epsilon^*(x, x') S_{F\alpha\beta}(x-x') \quad (22)$$

en la que P^* es el operador de ordenamiento cronológico modificado por Mathews³ y Koba⁴ y la función de Feynman $S_F(x)$ está definida por:

$$S_F(x) = \frac{1}{2} S^1(x) - \frac{i}{2} \epsilon^*(x) S(x) \quad (23)$$

este resultado completa el formalismo necesario para el tratamiento de problema s por las técnicas usuales de la teoría del campo.

Como una aplicación de este formalismo, puede demostrarse que suponiendo que los nucleones están descritos por la ecuación de Bhabha, su interacción con un campo escalar de mesón φ , con acoplamiento escalar y vectorial del tipo:

$$L_{be} = -g \psi^\mu \psi_\mu \varphi - \frac{f}{\kappa} i \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \quad (24)$$

conduce, hasta términos de segundo orden, a un potencial nuclear de la forma:

$$V_{ab}(r) = \left\{ \frac{g^2}{r} - \frac{1}{3} \frac{f^2}{\kappa^2} \left[\Lambda_{ab} \left(\frac{3}{r^3} + \frac{3\kappa}{r^2} + \frac{\kappa^2}{r} \right) + \underline{\Lambda}_a \cdot \underline{\Lambda}_b \frac{\kappa^2}{r} \right] \right\} e^{-\kappa r} \quad (25)$$

en la que el operador matricial Λ_{ab} está dado por:

$$\Lambda_{ab} = \frac{3}{r^2} (\underline{\Lambda}_a \cdot \underline{r}) (\underline{\Lambda}_b \cdot \underline{r}) - \underline{\Lambda}_a \cdot \underline{\Lambda}_b \quad (26)$$

y las matrices (20x20) Λ^μ pueden expresarse, de acuerdo con Gupta⁵, en términos de las matrices γ de Dirac (4 x 4) mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} (\Lambda^\mu)_{\underline{m}}^{\underline{n}} = & \gamma^\mu g_{\underline{m}}^{\underline{n}} - \frac{1}{3} \gamma^{\underline{n}} g_{\underline{m}}^{\underline{n}} + \frac{1}{3} \gamma_{\underline{m}} \gamma^\mu \gamma^{\underline{n}} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \gamma^\mu g_{\underline{m}}^4 g_{\underline{4}}^{\underline{n}} + \\ & + \partial g_{\underline{m}}^\mu g_{\underline{4}}^{\underline{n}} + \frac{d}{\lambda} g_{\underline{m}}^4 g^{\mu \underline{n}} - d \gamma_{\underline{m}} \gamma^\mu g_{\underline{4}}^{\underline{n}} - \gamma_{\underline{m}} g^{\mu \underline{n}} \end{aligned} \quad (27)$$

Aún cuando es todavía necesario expresar el potencial (25) en términos de los operadores de spin, es obvio que presenta formalmente el mismo aspecto de un potencial de Bethe.

Debe hacerse notar que el formalismo del campo de la ecuación de Bhabha es completamente análogo al del campo de la ecuación de Dirac, y que en tanto que no se usen explícitamente las reglas de conmutación para las matrices α^μ , las expresiones correspondientes en una y otra teoría son formalmente idénticas.

El autor desea agradecer la ayuda económica del Instituto Nacional de la Investigación Científica y del Instituto de Geofísica de la Universidad de México de los cuales también es investigador.

REFERENCIAS

1. H.J. Bhabha, Phil.Mag. **43**, 33 (1952) ; Rev.Mod.Phys. **21**, 451 (1949).
2. B.M. Udgaonkar, Proc.Indian Acad.Sci. **A 36**, 482 (1952) .
3. P.T. Mathews, Phys.Rev. **76**, 684 (1949) .
4. Z. Koba, Prog.Theor.Phys. **5**, 696 (1950) .
5. K.K. Gupta, Proc.Roy. Soc. **A 222**, 118 (1954).

INDICE

	Pag.
<i>Alba A., F.; T. A. Brody; Alonso Fernández; Marcos Mazari; Vinicio Serment Manuel Vásquez B.</i>	
Estudio de las Reacciones ${}_6\text{C}^{12}(\text{d,p}){}_6\text{C}^{13}$ y ${}_8\text{O}^{16}(\text{d,p}){}_8\text{O}^{17}$.	1
<i>Brody, T.A.</i>	
Alcance Aparente de Trazas en Emulsiones Nucleares.	19
<i>Cano Corona O.</i>	
Sobre la Estructura de la Radicinina.	27
<i>Graef Fernández, C.</i>	
Las fuerzas Gravitacionales de Birkhoff en el Espacio Físico.	35
<i>Lozano, Juan M.</i>	
Sobre la Distribución de los Polos de la Matriz S en el Modelo Optico del Nucleo.	49 49
<i>Moshinsky, Marcos.</i>	
Dispersión de Ondas Sonoras por una gota de liquido.	55
<i>Mazari Marcos. , Fernándo Alba; y Vinicio Serment.</i>	
Determinaciones de Secciones Totales con Neutrones de Energías Comprendidas entre 13.0 y 16.2 MeV.	69
<i>Moreno Moreno, A.</i>	
Determinación de la Edad de la Muestra: SP. 2 Tamaulipas México S. M. Canyon Infiernillo TM. C. 248, Tm. 248 Level 7 Culture Early.	81
<i>Nieto Casas, L.</i>	
Notas Sobre un Reactor de Uranio Natural, D_2O , CO_2 .	87
<i>Prieto C., Fernando E.</i>	
El Campo de la Ecuación de Bhabha .	95

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA



3 0112 068825717

